La filosofía se ha interesado prácticamente desde sus orígenes por los aspectos formales del razonamiento. Aristóteles fue el primero en desarrollar una teoría de la argumentación deductiva, por lo que se le considera con justicia el creador de la lógica como disciplina. La lógica permaneció esencialmente en el mismo estado en que la dejó Aristóteles hasta mediados del siglo XIX, cuando inició un nuevo desarrollo, basado en gran medida en su capacidad para analizar con ayuda de métodos matemáticos formas de razonamiento de las que la lógica aristotélica no podía dar cuenta, en particular, aquellas en que intervienen expresiones cuantificacionales múltiples y expresiones relacionales. Para el tratamiento sistemático de estas formas de razonamiento, se desarrollaron a finales del siglo XIX y principios del XX la teoría de las relaciones y la de la cuantificación. Estas dos teorías, junto con el cálculo proposicional, cuyo estudio iniciaron los lógicos megáricos y estoicos, constituyen el cuerpo básico de conocimientos de la lógica, una disciplina que a lo largo del siglo XX se ha desarrollado considerablemente y que está todavía en expansión.

Este libro es un manual de introducción a la lógica, escrito especialmente para estudiantes de filosofía, pero también para aquellas personas con formación humanística interesadas en materias que requieran conocimientos lógicos, como la lingüística o la ciencia cognitiva. En él se exponen los conceptos y resultados básicos de la lógica contemporánea sin presuponer ningún conocimiento técnico especial por parte del lector. Los elementos de teoría de conjuntos necesarios para presentar con rigor la lógica proposicional y, sobre todo, la cuantificacional se introducen de forma pausada en los primeros capítulos del libro. El concepto de infinitud, que tradicionalmente ha sido objeto de reflexión filosófica, es un concepto propio de la teoría de conjuntos que el lector también encontrará caracterizado con rigor en estos capítulos.

http://www.ariel.es
934132-6
00
9 788434 487482

Ariel Filosofía

Calixto Badesa / Ignacio Jané / Ramon Jansana
Elementos de lógica formal

Calixto Badesa
Ignacio Jané
Ramon Jansana

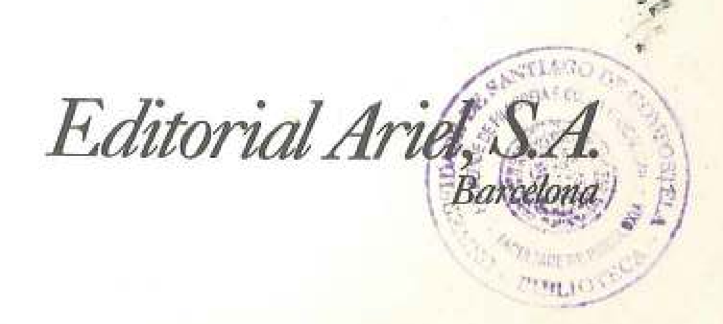
Elementos de lógica formal

Ariel Filosofía

Ariel Filosofía

Calixto Badesa
Ignacio Jané
Ramon Jansana

Elementos de lógica formal



Editorial Ariel, S.A.
Barcelona

Diseño cubierta: Nacho Soriano

1.ª edición: septiembre 1998

Córcega, 270 - 08008 Barcelona

ISBN: 84-344-8748-9

Depósito legal: B. 34.452 - 1998

Impreso en España

ÍNDICE

TERCERA PARTE

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

PRÓLOGO

Este libro es un manual de introducción a la lógica, escrito especialmente para estudiantes de filosofía, pero también para aquellas personas con formación humanística interesadas en materias que requieran conocimientos lógicos, como la lingüística o la ciencia cognitiva. En él hemos pretendido presentar de forma detallada los conocimientos mínimos de lógica que, a nuestro entender, todo licenciado en filosofía debiera poseer. El tratamiento de los distintos temas es pausado, con múltiples ejemplos y aclaraciones, y sin presuposiciones técnicas por parte del lector.

El libro se divide en tres partes: nociones de teoría de conjuntos, lógica proposicional y lógica de primer orden. Puesto que su título es *Elementos de lógica formal*, cabe decir algo acerca de las razones para incluir los cincos capítulos que constituyen la primera parte. Son, fundamentalmente, tres: en primer lugar, el tratamiento riguroso de los temas propiamente lógicos, sobre todo de la lógica de primer orden, requiere instrumentos técnicos que se elaboran en la primera parte. En segundo lugar, el desarrollo informal, pero riguroso, de los temas de la primera parte, en particular las justificaciones y demostraciones, es un buen material para la aplicación de los métodos de análisis desarrollados en los capítulos de lógica, al tiempo que la variedad de construcciones conjuntistas estudiadas (como los diversos órdenes lineales en el conjunto de los números naturales) ofrece al lector un indicio de la abundancia y diversidad de estructuras a que se aplica la lógica de primer orden, que, de otro modo, no podría sospechar. En tercer y último lugar, los métodos conjuntistas son necesarios para un tratamiento cabal de conceptos como el de número natural o el de infinito, que tradicionalmente han sido objeto de reflexión filosófica y que la persona interesada buscará seguramente en un libro de lógica.

El estudio del material incluido puede hacerse en orden distinto al de su aparición. De hecho, un curso introductorio de lógica puede empezar por la parte dedicada a la lógica proposicional, ya que (con excepción de algunas consideraciones sobre inducción, que pueden dejarse para un curso más avanzado), los conocimientos conjuntistas que estos capítulos presuponen son prácticamente nulos; el curso puede continuar con algunas secciones de la parte de teoría de conjuntos, en particular con las dos primeras secciones del

capítulo primero, las dos primeras secciones del capítulo segundo y las secciones 1, 2, 3 y 7 del capítulo tercero, y puede concluir con los capítulos 12, 13, 14 y 16 de la parte de lógica de primer orden. Antes de abordar el capítulo 15 es conveniente leer las secciones 1 y 4 del capítulo cuarto. En cuanto al último capítulo, *Teorías y modelos*, de dificultad superior a los anteriores, requiere una madurez y unos conocimientos que pueden adquirirse con el estudio de la totalidad de la primera parte, en especial del capítulo 5. Los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo, dispuestos en el mismo orden que los temas en que se basan, son parte integral del libro; es imposible adquirir un dominio razonable de la materia estudiada sin hacer un buen número de ellos.

El material incluido se basa en notas de clase de distintos cursos que los tres autores han impartido durante varios años en el Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona. Cada autor se ha encargado de la redacción de distintos capítulos, que han ido adquiriendo su forma definitiva en versiones sucesivas. La redacción final es el resultado de extensas discusiones referentes al material que cabía incluir, al modo de introducir y desarrollar los conceptos fundamentales, y a la notación y terminología que era conveniente utilizar. Hemos optado por incluir en el apéndice A la definición del concepto de verdad en términos de asignaciones, más habitual que la que, por razones pedagógicas, hemos decidido adoptar en el texto. Calixto Badesa ha sido el autor principal de los capítulos 6-11, Ignacio Jané de los capítulos 1-5 y 17, y Ramon Jansana de los capítulos 12-16.

Queremos dar las gracias a algunos profesores de nuestro departamento, en particular a Joan Bagaria, Ramon Cirera y Josep Maciá, por usar versiones previas de partes del libro en sus clases y llamarnos la atención sobre algunos errores y sugerirnos algunas mejoras. Una mención especial de agradecimiento la merece Álex Espinós, que durante algunos años se ha encargado de las clases prácticas de los cursos de *Introducción a la Lógica* de la licenciatura en filosofía de nuestra universidad y que ha propuesto un buen número de ejercicios y ha sugerido mejoras en la exposición de algunos puntos. Además, su lectura atenta de distintas versiones de este libro ha contribuido sustancialmente a la reducción del número de errores que contiene.

INTRODUCCIÓN

El objeto central de la lógica es el concepto de argumento correcto. Antes de precisar qué entendemos por un argumento debemos decir algo sobre enunciados y proposiciones. Un *enunciado* es una oración declarativa, una oración de la que, proferida en un cierto contexto, tiene sentido preguntarse si es verdadera o falsa. Así, la oración «Aristóteles es un filósofo griego» es un enunciado, pero no lo son, por ejemplo, las oraciones interrogativas o las exclamativas, como «¿En qué año nació Platón?» o «¡Qué ironía tan sutil!». Una *proposición* es lo que expresa un enunciado en un contexto determinado.

Una misma proposición puede ser expresada por distintas oraciones de un mismo lenguaje, por ejemplo «Bruto asesinó a César» y «César fue asesinado por Bruto», y, naturalmente, de distintos lenguajes («llueve», «plou», «chove», «piove», «il pleut», «it is raining», «es regnet»). Por otra parte, una misma oración declarativa puede expresar distintas proposiciones según el contexto en que sea proferida; por ejemplo, «el año pasado estuve en Roma» dicha por diferentes personas o en años distintos. El hecho de que craciones declarativas distintas expresen lo mismo y que una misma oración pueda expresar cosas distintas es una de las razones de que nos interesemos por las proposiciones.

Al proferir una oración declarativa podemos no expresar ninguna proposición por varias razones, una de ellas es que el contexto no determine la referencia de alguno de sus términos; por ejemplo, si decimos «él vendrá» sin referirnos a nadie en particular, no expresamos ninguna proposición. También es posible que no expresemos ninguna proposición porque alguno de los términos de la oración proferida carezca de referencia, así con la oración «el mayor número entero es primo» no podemos expresar ninguna proposición puesto que «el mayor número entero» no tiene referencia, ya que no hay ningún número entero mayor que todos los demás.

La proposiciones son verdaderas o falsas. No diremos qué significa que una proposición sea verdadera o falsa; se supone que es algo que todos sabemos, aunque posiblemente tendríamos muchas dificultades para articularlo coherentemente. Hay proposiciones verdaderas cuya verdad ignoramos, o que incluso creemos que son falsas, y hay proposiciones falsas que no sabemos que lo son, o que creemos que son verdaderas. Una cosa es, pues, el *valor de verdad* de una proposición (el que sea verdadera o falsa) y otra nuestro conocimiento de este valor de verdad.

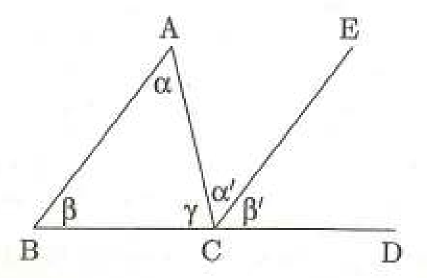
Argumentos y argumentaciones

Supongamos que estamos interesados en conocer el valor de verdad de una proposición determinada, *P*. Podemos hacerlo de distintos modos, según el tipo de proposición de que se trate; por ejemplo, la proposición que expresamos con «ahora llueve» podríamos decidirla mirando por la ventana. En ciertas circunstancias tratamos de hallar el valor de verdad de una proposición no directamente, sino mediante una argumentación. Si procedemos de este modo, empezamos haciendo una conjetura sobre el valor de verdad de *P*. Si conjeturamos que *P* es verdadera, procuramos deducirla de otras proposiciones que ya sabemos que son verdaderas y, si lo logramos, decimos que hemos *demostrado* *P*. Si conjeturamos que es *P* falsa, procuramos deducir de ella y, posiblemente, de otras proposiciones que ya sabemos que son verdaderas, una proposición que ya sabemos que es falsa. Si lo logramos, decimos que hemos *refutado* *P*.

Para fijar las ideas daremos un ejemplo de demostración y otro de refutación. El primer ejemplo lo utiliza Kant en su *Crítica de la razón pura* como apoyo a su tesis de que la matemática en general y la geometría en particular no se limita a la consideración de conceptos, sino que razona con ayuda de lo que llama «construcciones en la intuición». El segundo ejemplo lo utiliza Aristóteles en los *Primeros analíticos* como ilustración del tipo de argumentación que procede por reducción al absurdo.

Ejemplo 1

Demostraremos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Consideremos un triángulo cualquiera *ABC* con ángulos internos α, β y γ. Prolonguemos ahora el lado *BC* hasta el punto *D* y tracemos la línea *CE* paralela al lado *AB*. Sean α' y β' los ángulos que forma la recta *CE* con las rectas *CA* y *BD*, respectivamente.



Sabemos que los ángulos alternos que forma una recta al cortar dos rectas paralelas son iguales; así, puesto que la recta *AC* corta las rectas paralelas *AB* y *EC*, $\alpha = \alpha'$. Sabemos también que los ángulos correspondientes que forman dos rectas paralelas al incidir sobre una recta cualquiera son iguales; así, puesto que *AB* y *EC* son paralelas y ambas inciden sobre *BD*, $\beta = \beta'$. Ahora bien, una recta que incide sobre otra forma dos ángulos que suman dos rectos; así, puesto que *AC* incide sobre *BD*, los ángulos γ y $(\alpha' + \beta')$ y, por tanto, los ángulos α', β' y γ suman dos rectos. Pero entonces, puesto que $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$, concluimos que los ángulos α, β y γ suman dos rectos.

Ejemplo 2

Refutaremos que $\sqrt{2}$ es un número racional y, así, demostraremos que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Recordemos que un número racional es un número que puede expresarse como una fracción de dos números enteros y que un número irracional es un número que no puede expresarse de este modo. Recordemos también que $\sqrt{2}$ es, por definición, el número positivo cuyo cuadrado es igual a 2. Deduciremos una contradicción (por tanto una proposición falsa) de la suposición de que $\sqrt{2}$ es racional y de algunas proposiciones aritméticas verdaderas. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Así, hay números enteros n y m, sin ningún factor común, tales que $\sqrt{2} = n/m$; en particular, n y m no son ambos pares. Elevando al cuadrado obtenemos $2 = (\sqrt{2})^2 = (n/m)^2 = n^2/m^2$, de manera que $2m^2 = n^2$. Esto significa que n^2 es par. Pero entonces, n también es par (ya que el cuadrado de un número impar es siempre impar) y, así, m es impar. Ahora bien, puesto que n es par, hay un número k tal que $n = 2k$, y, por tanto, $n^2 = 4k^2$. Tenemos pues que $2m^2 = 4k^2$ y, así, $m^2 = 2k^2$. Pero entonces m es par. Hemos obtenido pues que m es par y m es impar. Esto es una contradicción que muestra que nuestra suposición inicial ($\sqrt{2}$ es racional) es falsa.

De acuerdo con Corcoran,[1] en una *argumentación* distinguimos tres componentes: las *premisas*, la *conclusión* y la *cadena argumentativa*. Las premisas y la conclusión son proposiciones que constituyen el *argumento* de la argumentación. El argumento es *correcto* si la conclusión es consecuencia, si se sigue, de las premisas; en otro caso el argumento es incorrecto. La cadena argumentativa conecta las premisas con la conclusión. Una argumentación es *concluyente* si la cadena argumentativa pone en evidencia que la conclusión es consecuencia de las premisas, es decir que el argumento es correcto; en otro caso la argumentación es inconcluyente.

En la primera de las argumentaciones que nos han servido de ejemplo, la conclusión del argumento es que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es igual a dos rectos. Las premisas son las proposiciones geométricas generales en que se basa el razonamiento que hemos llevado a cabo, en particular las tres proposiciones siguientes:

1. los ángulos alternos que forma una recta al cortar dos rectas paralelas son iguales,
2. los ángulos correspondientes que forman dos rectas paralelas al incidir sobre una recta son iguales,

1. John Corcoran, «Argumentation and Logic», *Argumentation*, 3 (1989), pp. 17-43

3. una recta que incide sobre otra forma ángulos que suman dos rectos.

La cadena argumentativa muestra con detalle cómo obtener la conclusión deseada a partir de las premisas. A ella pertenece la construcción de la figura y los distintos razonamientos intermedios con cuya ayuda obtenemos resultados parciales antes de alcanzar el resultado final. Con uno de estos razonamientos concluimos, por ejemplo, que los ángulos α y α' son iguales; con otro que los ángulos α', β' y γ suman dos rectos. De hecho, muchos de estos razonamientos subsidiarios pueden ser considerados a su vez como nuevas argumentaciones más simples que podemos también analizar en componentes.

De modo análogo, la conclusión de nuestro segundo ejemplo de argumentación es clara: $\sqrt{2}$ no es un número racional; pero no es obvio de antemano cuáles son las premisas del argumento subyacente. Éstas son, nuevamente, proposiciones generales sobre números, como que todo número racional es un cociente de dos números enteros sin ningún factor común, o que el producto de dos números impares es impar. La cadena argumentativa es la sucesión articulada de razonamientos que muestran cómo, a partir de estas premisas, se obtiene la conclusión.

La circunstancia de que en ambas argumentaciones no era obvio, al principio, cuáles son las premisas, pero sí cuál es la conclusión no es accidental. Esto es lo que ocurre habitualmente. Normalmente, cuando argumentamos sabemos qué queremos demostrar o qué queremos refutar, pero no sabemos de antemano en qué nos basaremos exactamente, no sabemos qué información precisa usaremos para ello; la información necesaria la vamos recogiendo poco a poco, a medida que la necesitamos. Sólo cuando la argumentación ha concluido podemos analizarla con detalle y aislar sus premisas y su conclusión.

Una argumentación concluyente es una *deducción* y una deducción con premisas verdaderas es una *demostración*. Así, el argumento de una deducción es siempre correcto y la conclusión de una demostración es siempre verdadera. Ahora bien, es posible que el argumento de una argumentación sea correcto y, no obstante, la argumentación sea inconcluyente, de modo que no haya deducción. Por ejemplo, el argumento «Todos los filósofos son griegos, Sócrates es filósofo, por tanto, Sócrates es griego» es trivialmente correcto; pero la siguiente argumentación es claramente inconcluyente: «Todos los filósofos son griegos y Sócrates es filósofo. Así, puesto que Sócrates fue maestro de Platón y todos los maestros de Platón son griegos, Sócrates es griego.»

El concepto general de deducción (y, por tanto, el de demostración) es difícil de precisar debido a la exigencia de que la argumentación sea concluyente. Como hemos dicho, que la argumentación sea concluyente significa que la cadena argumentativa pone en evidencia que la conclusión se sigue de las premisas. La dificultad de la empresa radica en el poner en evidencia. Poner en evidencia es hacer evidente; pero ¿a quién? Debe haber un sujeto a quien la cadena argumentativa haga evidente la corrección del argumento en cuestión. Que una argumentación sea o no una deducción puede depender del sujeto a quien vaya dirigida; una cadena argumentativa puede ser concluyente para A y puede no serlo para B (por ejemplo, porque algunos pasos de la argumentación sean claros para A pero sean oscuros para B). En definitiva, el concepto

de deducción que hemos introducido no es absoluto, sino relativo a uno o más sujetos.

La lógica formal no se ocupa de este componente relativo de las deducciones. En lógica nos limitamos al estudio de los argumentos desde la perspectiva de su corrección. Desde un punto de vista lógico, un argumento no es más que una serie de premisas y una conclusión. La relación de consecuencia, es decir, la relación que se da entre las premisas y la conclusión de un argumento correcto, no es relativa, no varía de un sujeto a otro: un argumento es correcto o no lo es; otra cosa es que sepamos si lo es.

ARGUMENTOS CORRECTOS

Hemos dicho que un argumento es correcto si su conclusión se sigue, o es consecuencia, de sus premisas. Si bien no hay duda de que sabemos reconocer ciertos argumentos correctos como tales, también es cierto que nos veríamos en serias dificultades para explicar qué queremos decir, en general, cuando decimos que la conclusión de un argumento correcto se sigue de sus premisas. De esto nos ocuparemos largamente en las partes segunda y tercera este libro, pero ahora haremos algunas observaciones generales al respecto que nos ayuden a ver por qué el camino que seguiremos es adecuado.

Empezamos señalando una característica esencial de los argumentos correctos: 1) si todas las premisas de un argumento correcto son verdaderas, también lo será su conclusión; por consiguiente, 2) si la conclusión de un argumento correcto es falsa, por lo menos una de sus premisas será también falsa. Podemos referirnos de modo sugerente a la primera observación, diciendo que los argumentos correctos transmiten la verdad de las premisas a la conclusión. En razón de esta característica de los argumentos correctos, una demostración nos convence de la verdad de su conclusión, y en razón de la segunda declaramos falsa una proposición cuando de ella y de otras proposiciones verdaderas deducimos una falsedad.

Consideremos los siete argumentos siguientes, cada uno de los cuales consta de dos premisas (las dos primeras líneas) y conclusión (la tercera línea). Los tres puntos en disposición triangular que preceden a la conclusión se leen «por tanto» o «por consiguiente».

A1
Las ballenas son mamíferos,
ningún mamífero es un ave;
∴ ninguna ballena es un ave;

A2
Las ballenas son mamíferos,
ninguna ballena es un ave;
∴ ningún mamífero es un ave.

B2
Las ballenas son mamíferos,
ninguna ballena es alada;
∴ ningún mamífero es alado.

C1
Las ballenas son mamíferos,
ningún mamífero es alado;
∴ ninguna ballena es alada.

C2
Las ballenas son peces,
ninguna ballena es un reptil;
∴ ningún pez es un reptil.

D1
Las ballenas son peces,
ningún pez es vivíparo;
∴ ninguna ballena es vivípara.

D2
Las ballenas son peces,
ninguna ballena es ovípara;
∴ ningún pez es ovíparo.

Antes de seguir adelante, el lector debería convencerse de que, de estos siete argumentos, A1, C1 y D1 son correctos, mientras que los cuatro restantes (A2, B2, C2 y D2) son incorrectos. Para iniciar la discusión, observemos en primer lugar que

A1 y A2 tienen ambas premisas verdaderas y conclusión verdadera,
B2 tiene ambas premisas verdaderas y conclusión falsa,
C1 y C2 tienen por lo menos una premisa falsa y conclusión verdadera,
D1 y D2 tienen por lo menos una premisa falsa y conclusión falsa.

De esta información podemos concluir que B2 es incorrecto, ya que todo argumento correcto transmite la verdad de las premisas a la conclusión. Ahora bien, sabiendo que B2 es incorrecto podemos justificar que A2, B2 y D2 también lo son, ya que la *forma* de estos tres argumentos es la misma que la de B2. No sabríamos decir en general qué es la forma de un argumento, pero sí podemos precisar cuál es la forma de estos argumentos particulares. Puesto que decir que las ballenas son mamíferos equivale a decir que toda ballena es un mamífero, los cuatro argumentos de la derecha (A2, B2, C2 y D2) son de la forma:

Todo X es Y,
ningún X es Z;
∴ ningún Y es Z.

Lo importante para la corrección de un argumento es su forma. En particular, un argumento cuya forma es la de un argumento incorrecto es también incorrecto. Por la misma razón, para mostrar que los argumentos de la izquierda (A1, C1 y D1) son correctos, basta observar que los tres son de la forma:

Todo X es Y,
ningún Y es Z;
∴ ningún X es Z.

y que todos los argumentos de esta forma son correctos. En efecto, sean quienes fueren X, Y y Z, si todo X es Y y a es un X cualquiera, entonces a es un Y. Por tanto, si ningún Y es Z, a no es un Z. Así, puesto que a es un X cualquiera, podemos concluir que ningún X es Z.

Las consideraciones sobre la forma que hemos hecho son harto imprecisas. Con el fin de alcanzar cierta precisión, nos preguntamos en primer lugar cómo hemos obtenido, o cómo podríamos obtener, la forma lógica de los siete argumentos (la forma *lógica*, porque es la responsable de su corrección o su incorrección). No la hemos obtenido mediante un análisis gramatical de las premisas y de la conclusión, sino mediante un análisis conceptual. Así, hemos dividido los objetos de que hablan estos argumentos (animales, o, tal vez, seres vivos; en realidad no importa) en tres clases, X, Y y Z, sin excluir que un mismo objeto pueda estar en dos o, incluso, en las tres clases. Las premisas y la conclusión expresan relaciones entre estas tres clases. En la forma del argumento, estas relaciones quedan plasmadas, pero sin hacer mención alguna del contenido de las clases (en la forma no se habla de animales, de ballenas, no se habla de nada en concreto). De manera mucho más explícita, la forma de los argumentos A1, C1 y D1 sería ésta:

Todo objeto de la clase X es un objeto de la clase Y,
no hay objetos que sean a la vez de la clase Y y de la clase Z;
∴ no hay objetos que sean a la vez de la clase X y de la clase Z,

mientras que la forma de los argumentos A2, B2, C2 y D2 sería:

Todo objeto de la clase X es un objeto de la clase Y,
no hay objetos que sean a la vez de la clase X y de la clase Z;
∴ no hay objetos que sean a la vez de la clase Y y de la clase Z,

Insistimos una vez más: la forma pertinente no depende tanto de las expresiones lingüísticas empleadas como de las porposiciones que estas oraciones expresen. Así, el argumento

Todos los discípulos de Sócrates buscan la sabiduría,
la búsqueda de la sabiduría es incompatible con la estupidez;
∴ por tanto, Sócrates no tiene discípulos estúpidos,

es realmente de la misma forma que A1, C1 y D1 y, por tanto, es correcto; para verlo, tomamos:

X = la clase de los discípulos de Sócrates,
Y = la clase de las personas que buscan la sabiduría,
Z = la clase de las personas estúpidas.

Lo que nos importa de esta discusión es la observación hecha sobre la forma. La lógica se ocupa de la forma de los argumentos o, como también diremos, de *esquemas* de argumentos, más que de argumentos en sí. En algunos casos (como en los ejemplos anteriores) nos es relativamente fácil descubrir la forma del argumento en cuestión; pero otras veces es mucho más difícil. A menudo, la forma aparente de un argumento (es decir, la forma gramatical en la que expresamos las premisas y la conclusión) puede ser un mal guía hacia

la forma lógica. Consideremos los dos argumentos siguientes:

Quevedo es coetáneo de Góngora,
Góngora es el autor de las *Soledades*;
∴ Quevedo es coetáneo del autor de las *Soledades*.

Quevedo es coetáneo de alguien,
alguien es el autor de *La divina comedia*;
∴ Quevedo es coetáneo del autor de *La divina comedia*.

Es claro que el primero es correcto, pero no el segundo; sin embargo, un análisis superficial podría llevarnos a pensar que ambos tienen la misma forma, que corresponden al mismo esquema:

a es coetáneo de b,
b es el autor de c;
∴ a es coetáneo del autor de c.

En consecuencia, si es cierto, como afirmamos, que la corrección de un argumento depende de su forma, nos vemos obligados a negar que ambos argumentos sean de esta forma. De hecho, este último esquema captura bastante bien la forma del primer argumento, pero no del segundo.

¿Qué relación hay entre la forma de un argumento y su corrección? Para tratar de responder a esta pregunta nos preguntamos una vez más qué significa que un argumento sea correcto. Tenemos la convicción de que (*) un argumento es correcto si es imposible que sus premisas sean todas verdaderas y su conclusión sea falsa. Pero ¿qué significa esto? más específicamente, ¿qué queremos decir con «es imposible»? Consideremos el siguiente argumento:

Todo múltiplo de cuatro es par,
todo múltiplo de ocho es par;
∴ todo múltiplo de ocho es múltiplo de cuatro.

Tanto las premisas como la conclusión de este argumento son verdaderas. Además, es imposible que la conclusión sea falsa, es decir, es imposible que un múltiplo de ocho no lo sea de cuatro. Es imposible, pues, que las premisas de este argumento sean verdaderas y la conclusión sea falsa. ¿Nos vemos, por ello, obligados a concluir, de acuerdo con (*), que este argumento es correcto? Desde luego que no, porque este argumento es incorrecto. ¿Debemos abandonar, entonces, nuestra convicción (*)? Tampoco; no debemos abandonarla, sino más bien entenderla adecuadamente. Y es aquí donde interviene la forma. Si nos preguntasen por qué este argumento es incorrecto podríamos responder diciendo que si fuera correcto también lo sería este otro argumento:

Todo múltiplo de cuatro es par,
todo múltiplo de seis es par;
∴ todo múltiplo de seis es múltiplo de cuatro,

que se obtiene del anterior sustituyendo «múltiplo de ocho» por «múltiplo de seis». Pero este último argumento es claramente incorrecto, ya que sus premisas son verdaderas y su conclusión es falsa. Estos dos argumentos comparten la forma, corresponden a un mismo esquema:

Todo X es Y,
todo Z es Y;
∴ todo Z es X.

Apelando a formas y a esquemas podemos mantener el principio (*), interpretándolo de modo razonable. La imposibilidad de que habla (*) debemos entenderla aplicada no al argumento mismo, sino al esquema subyacente, al esquema del cual el argumento es una ejemplificación. Un esquema tiene lugares vacíos, contiene términos variables (en este último caso X, Y y Z) que, según cómo se interpreten, dan lugar a distintos argumentos. Algunas de estas interpretaciones darán lugar a argumentos con todas las premisas verdaderas o con alguna premisa falsa, con conclusión verdadera o con conclusión falsa. Ahora bien, dado un esquema particular, puede ocurrir que siempre que interpretemos las variables de modo que las premisas del argumento obtenido sean verdaderas, su conclusión también sea verdadera; si éste es el caso, decimos que el esquema en cuestión da lugar a argumentos correctos, que es un *esquema de argumentos correctos*. Así, un esquema es un esquema de argumentos correctos si es imposible interpretar sus variables de tal modo que se obtenga un argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa. Éste es el contenido de (*).

A lo largo de esta discusión nos hemos encontrado con tres ejemplos de esquemas:

Todo X es Y,	Todo X es Y,	Todo X es Y,
ningún Y es Z;	ningún X es Z;	todo Z es Y;
∴ ningún X es Z.	∴ ningún Y es Z.	∴ todo Z es X.

En los tres casos, las variables X, Y y Z deben interpretarse como clases determinadas de objetos. Así, como ya dijimos en su momento, en vez de, por ejemplo, «todo X es Y», sería más apropiado decir «todo objeto de la clase X es un objeto de la clase Y». El primer esquema es un esquema de argumentos correctos, lo cual significa que es imposible hallar clases X, Y y Z para las cuales las premisas resulten verdaderas y la conclusión falsa. Los otros dos esquemas lo son de argumentos incorrectos. Obsérvese la asimetría que hay entre mostrar que un esquema lo es de argumentos incorrectos o que lo es de argumentos correctos. Para ver que un esquema lo es de argumentos incorrectos, basta encontrar un solo argumento que lo ejemplifique que tenga premisas verdaderas y conclusión falsa; sin embargo, para mostrar que un esquema lo es de argumentos correctos hace falta una justificación general; así lo hicimos cuando nos ocupamos de los argumentos A1, C1 y D1.

No todas las formas de argumentos son semejantes a las que hemos vis-

to en los ejemplos anteriores. En los esquemas que hemos considerado hasta ahora, los términos variables debían interpretarse como clases de objetos. Pero en otro tipo de esquemas, los términos variables pueden interpretarse de otros modos. Por ejemplo, de la argumentación que hemos presentado para justificar que $\sqrt{2}$ es un número racional podemos extraer el siguiente argumento correcto de cuatro premisas, cuya forma es de naturaleza distinta a las consideradas anteriormente.

$\sqrt{2} = n/m$ y los números n y m no tienen factores en común,
si $\sqrt{2} = n/m$, $2m^2 = n^2$,
si $2m^2 = n^2$, n y m son pares,
si n y m no tienen factores en común y n es par, m es impar;
$\therefore$ m es par e impar.

La forma de este argumento es la siguiente:

P y Q,
si P entonces R,
si R entonces S y T,
si Q y S entonces no T;
$\therefore$ T y no T.

En este esquema, las letras «P», «Q», «R», «S» y «T» están, respectivamente, en lugar de «$\sqrt{2} = n/m$», «n y m no tienen factores en común», «$2m^2 = n^2$», «n es par»y «m es par». El lector puede convencerse de que todos los argumentos de esta forma son correctos. En la segunda parte del libro se desarrolla la lógica proposicional, que permite estudiar sistemáticamente la corrección de los argumentos con formas de este tipo.

Los términos variables que pueden aparecer en los esquemas son muy variadas, las formas de los argumentos muy diversas, los esquemas muy heterogéneos. En lógica formal nos ocupamos de formas de argumentos, pero no partimos de argumentos concretos tratanto de descubrir su forma lógica, sino que estudiamos las formas directamente. Creamos lenguajes artificiales, *formales*, adecuados para expresar formas. Estos lenguajes son puramente esquemáticos, sus oraciones son meras fórmulas; pero, naturalmente, no los construimos arbitrariamente, sino con el objetivo de que las formas que obtengamos sean formas de argumentos reales. Así, si a un argumento real, expresado en español o en cualquier otra lengua natural, le conviene una de estas formas de argumentos correctos, el argumento en cuestión será correcto.

En este libro estudiaremos dos clases de lenguajes formales: los lenguajes proposicionales y los lenguajes cuantificacionales de primer orden, lo cual nos permitirá dar cuenta de la corrección de una gran variedad de argumentos, entre ellos, naturalmente, los que nos han servido de ejemplo y otros muchos más complejos. Pero nuestro objetivo no es realmente obtener una gran variedad de formas de argumentos correctos, sino sobre todo entender por qué los argumentos correctos lo son; en otras palabras, obtener una teoría de la consecuencia lógica.

PRIMERA PARTE

NOCIONES DE TEORÍA DE CONJUNTOS

Capítulo 1
EL CONCEPTO DE CONJUNTO

1. El principio de extensionalidad

Como primera aproximación, suficiente para nuestros propósitos en este libro, podemos concebir un **conjunto** como una colección de objetos, los **elementos** del conjunto. Todo tipo de objeto es un posible elemento de un conjunto. Lo es, por ejemplo, un objeto físico, un número, una palabra y también un conjunto. Así, hay conjuntos de objetos físicos, conjuntos de números, conjuntos de palabras y (como veremos más adelante) hay también conjuntos de conjuntos, es decir, conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos.

Si A es un conjunto y x es un objeto, las expresiones

$$x \in A \quad \text{y} \quad x \notin A$$

significan, respectivamente, que x es un elemento de A y que x no es un elemento de A. En vez de «**x es un elemento de A**», también decimos «**x pertenece a A**». Estas dos expresiones son sinónimas. Análogamente, en vez de decir que x **no es un elemento de** A diremos también que x **no pertenece a** A. Si x e y son objetos cualesquiera,

$$x = y \quad \text{y} \quad x \neq y$$

significan, respectivamente, que x e y son el mismo objeto y que x e y son objetos distintos.

Clasificamos los objetos que consideramos en dos categorías: los conjuntos y todos los demás. Nos referimos a los objetos que no son conjuntos como *objetos primitivos*. Los objetos primitivos no tienen elementos.

Usaremos las letras mayúsculas latinas (A, B, ..., Z) para referirnos a conjuntos. Hablando técnicamente, las letras mayúsculas latinas *varían* sobre conjuntos, son *variables de conjunto*. Para referirnos a objetos cualesquiera, sean o no conjuntos, usaremos las letras minúsculas latinas (a, b, ..., z). Estas letras, pues, varían sobre objetos cualesquiera, son *variables de objeto*. Así, si decimos: «*B tiene tal propiedad*» presuponemos que B es un conjunto, mientras que si decimos: «*b tiene tal propiedad*» no lo presuponemos; b puede ser un conjunto o un objeto primitivo.

Un conjunto está determinado por sus elementos. Dicho de otro modo, no hay dos conjuntos distintos que tengan los mismos elementos. O aún, si A

y B tienen los mismos elementos, entonces $A = B$. Este hecho básico sobre los conjuntos es el *principio de extensionalidad*, que podemos reformular así:

PRINCIPIO DE EXTENSIONALIDAD. *Si todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A, entonces A = B.*

La afirmación inversa de este principio es obviamente verdadera: si A y B son el mismo conjunto, A y B tienen los mismos elementos. Por consiguiente,

$$A = B \quad \text{sii}^1 \quad A \text{ y } B \text{ tienen los mismos elementos.}$$

El principio de extensionalidad expresa que lo que importa de un conjunto no es cómo lo definimos, sino cuáles son sus elementos. Es ésta una característica de los conjuntos que los distingue de las propiedades. En ciertos contextos, podemos emplear tanto el lenguaje de los conjuntos como el de las propiedades. Así, si decimos que 2 es un número par, podemos entender nuestra aseveración en términos de conjuntos (2 es un elemento del conjunto de los números pares) o en términos de propiedades (2 tiene la propiedad de ser un número par). Si bien a menudo la diferencia no tiene ningún efecto apreciable, hay que tener en cuenta que el análogo del principio de extensionalidad no es válido para las propiedades, ya que dos propiedades distintas pueden ser poseídas por exactamente los mismos objetos. Consideremos, por ejemplo, las propiedades Φ y Ψ:

Φ: *ser un número natural par menor que* 3,

Ψ: *ser un número cuyo cuadrado es igual a su doble.*

Si bien Φ y Ψ son propiedades diferentes, una breve reflexión pone de manifiesto que las poseen los mismos objetos: los números 0 y 2, ya que son los únicos números naturales pares menores que 3 y son también los únicos números que satisfacen la ecuación $x^2 = 2x$ (los números naturales son los enteros no negativos: 0, 1, 2, 3, ...).

En contraste con esta situación, el conjunto de los números naturales pares menores que 3 y el conjunto de los números cuyo cuadrado es igual a su doble son el mismo conjunto, ya que poseen los mismos elementos: los números 0 y 2. Suele decirse que este conjunto es la extensión de las propiedades Φ y Ψ. En general, si Φ es una propiedad y A es un conjunto, decimos que A es la **extensión** de Φ si los elementos de A son precisamente los objetos que tienen la propiedad Φ. Puesto que propiedades distintas pueden tener la misma extensión, se dice a veces que las propiedades, a diferencia de los conjuntos, no son extensionales, no están determinadas por su extensión.

Observemos que, de acuerdo con el principio de extensionalidad, dos conjuntos distintos difieren por lo menos en un elemento, de manera que si A y B son conjuntos cualesquiera, $A \neq B$ si y sólo si hay algún objeto x tal que o bien $x \in A$ y $x \notin B$ o bien $x \in B$ y $x \notin A$.

1. Normalmente usaremos las tres letras «sii» como una abreviación de la expresión «si y sólo si».

CÓMO REFERIRSE A CONJUNTOS

Como objetos abstractos que son, los conjuntos no están localizados en el espacio ni en el tiempo, por lo que no podemos referirnos a ellos señalándolos. Ahora bien, si queremos hablar de conjuntos determinados debemos disponer de algún modo de nombrarlos. Hay dos maneras de *nombrar* o de *denotar* conjuntos; podemos hacerlo por *comprensión* o por *enumeración*.

Denotamos un conjunto por **comprensión** dando una propiedad que poseen todos los elementos del conjunto y sólo ellos (es decir, dando una propiedad cuya extensión es el conjunto en cuestión). Así, hablamos del conjunto de los números primos menores que 10, del conjunto de los números enteros impares o del conjunto de los planetas exteriores del Sistema solar. La notación habitual para referirse a estos tres conjuntos es:

$\{x : x$ es un número primo menor que $10\}$,

$\{x : x$ es un número entero impar$\}$,

$\{x : x$ es un planeta exterior del Sistema solar$\}$.

En general, si Φ es una propiedad que poseen todos los elementos de un conjunto A y sólo ellos, denotamos A por

$$\{x : x \text{ posee la propiedad } \Phi\}.$$

Para expresar esquemáticamente que el objeto a posee la propiedad Φ, escribimos

$$\Phi(a).$$

Así, si hay un conjunto cuyos elementos son los objetos que tienen la propiedad Φ, este conjunto (único, por el principio de extensionalidad) es

$$\{x : \Phi(x)\}.$$

Puesto que pertenecer al conjunto de los objetos que poseen la propiedad Φ no es otra cosa que poseer la propiedad Φ, disponemos de la siguiente *regla de conversión*: Para todo objeto a,

$$a \in \{x : \Phi(x)\} \text{ sii } \Phi(a).$$

En consecuencia, para todo conjunto A,

$$A = \{x : x \in A\},$$

pues si a es un objeto cualquiera,

$$a \in A \text{ sii } a \in \{x : x \in A\}.$$

Además, si $A = \{x : \Phi(x)\}$ y $B = \{x : \Psi(x)\}$, entonces, por el principio de extensionalidad,

$$A = B \text{ sii para todo objeto } x,\ \Phi(x) \text{ sii } \Psi(x).$$

Denotamos un conjunto por **enumeración** nombrando todos sus elementos. (Esto, naturalmente, es impracticable si el conjunto tiene muchos elementos y es imposible si el conjunto es infinito.) Así, hablamos del conjunto cuyos elementos son los números 2, 3, 5 y 7, del conjunto cuyos elementos son Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón, o del conjunto cuyo único elemento es Platón.

El modo habitual de denotar conjuntos por enumeración es escribir entre llaves los nombres de sus elementos separados por comas. Conforme a ello, denotamos los conjuntos anteriores así:

$\{2,3,5,7\}$,

{Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón},

{Platón}.

En general, si los elementos de un conjunto son $a_1, a_2, \ldots, a_n$, denotamos este conjunto por enumeración así:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Por tanto, para todo objeto x,

$$x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ sii } x = a_1 \text{ o } x = a_2 \text{ o } \ldots \text{ o } x = a_n.$$

Decimos que $\{a\}$, el conjunto cuyo único elemento es el objeto a, es el **conjunto unitario** de a. También decimos que $\{a,b\}$, el conjunto cuyos únicos elementos son los objetos a y b, es el **par** de a y b.

De acuerdo con el principio de extensionalidad, cuando denotamos un conjunto por enumeración no importa en qué orden nombremos sus elementos ni si hay repeticiones en la enumeración. Así, si a, b, c son objetos cualesquiera,

$$\{a,b,c\} = \{a,c,b\} = \{b,c,a\} = \{a,b,a,c,c\}.$$

2. La relación de inclusión

Decimos que un conjunto A **está incluido** en un conjunto B o que A es un **subconjunto** de B, en símbolos, $A \subseteq B$, si todo elemento de A pertenece también a B. O sea

$$A \subseteq B \text{ sii para todo objeto } x, \text{ si } x \in A, \text{ entonces } x \in B.$$

Para expresar que A está incluido en el conjunto B decimos también que B **incluye** al conjunto A.

Observemos que para cualesquiera conjuntos A, B, C,

1. $A \subseteq A$,
2. si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$,
3. si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

La primera observación dice simplemente que todo elemento de un conjunto A pertenece a A; la segunda dice que si todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a C, entonces todo elemento de A también pertenece a C. La tercera observación dice que si todo elemento de A lo es de B y todo elemento de B lo es de A, entonces A y B son el mismo conjunto; esto no es más que una reformulación del principio de extensionalidad. Decimos que (1) expresa que la inclusión es *reflexiva*, (2) que la inclusión es *transitiva* y (3) que la inclusión es *antisimétrica*.

Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, decimos que A **está incluido propiamente** en B o que A es un **subconjunto propio** de B; en símbolos, $A \subset B$. O sea,

$$A \subset B \text{ sii } A \subseteq B \text{ y } A \neq B.$$

Naturalmente,

$$A \subseteq B \text{ sii } A \subset B \text{ o } A = B.$$

También escribimos

$$A \nsubseteq B, \text{ respectivamente } A \not\subset B$$

para expresar que A no es un subconjunto de B y que A no es un subconjunto propio de B. Observemos que $A \nsubseteq B$ si y sólo si hay por lo menos un objeto x tal que $x \in A$ y $x \notin B$.

Es importante no confundir adscripciones de pertenencia ($\in$) con adscripciones de inclusión ($\subseteq$). Para distinguir estas dos relaciones, el lenguaje natural es un mal guía. A menudo usamos el mismo verbo (ser) para expresar la pertenencia, la inclusión y también la igualdad. Consideremos las oraciones siguientes:

1. Argos *es* un perro.
2. El perro *es* un mamífero.
3. Argos *es* el perro de Ulises.

El significado de «es» es distinto en cada caso. Así, en términos conjuntistas, reformularíamos (1) diciendo que Argos (a) *pertenece* al conjunto de los perros (P):

$$a \in P,$$

mientras que (2) dice que todo perro es un mamífero, es decir, que el conjunto de los perros *está incluido* en el conjunto de los mamíferos (M):

$$P \subseteq M.$$

Finalmente, (3) expresa que Argos y el perro de Ulises *son el mismo objeto*, es decir que

$$a = \textit{el perro de Ulises}.$$

Con respecto a la relación entre inclusión y pertenencia, podemos observar que para todo objeto x y todo conjunto A,

$$x \in A \text{ sii } \{x\} \subseteq A.$$

En efecto, el único elemento de $\{x\}$, el conjunto unitario de x, es x. Por tanto, decir que $\{x\} \subseteq A$, o sea, que todos los elementos de $\{x\}$ pertenecen a A, equivale a decir que x pertenece a A.

El conjunto vacío

Hay conjuntos sin elementos. Por ejemplo, ninguno de los conjuntos siguientes posee elementos:

El conjunto de los triángulos cuadrados.

El conjunto de los números primos divisibles por 6.

El conjunto de los mamíferos invertebrados.

Estos conjuntos poseen los mismos elementos y son, por tanto, un único conjunto. En general, si B y C son conjuntos sin elementos, entonces, por el principio de extensionalidad, $B = C$. Llamamos al único conjunto sin elementos el **conjunto vacío** y lo denotamos con el símbolo «$\emptyset$».

Es claro que $\emptyset$ es la extensión de cualquier propiedad que no posea ningún objeto, como la propiedad de ser un número entero cuyo cuadrado es negativo o la de ser un triángulo todos cuyos vértices están en una misma línea recta. Otra propiedad que ningún objeto posee es la de ser distinto de sí mismo, por lo que podemos definir el conjunto vacío como el conjunto de todos los objetos que son distintos de sí mismos:

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

Si no vemos del todo claro que hay un único conjunto sin elementos, supongamos que B y C son conjuntos sin elementos y preguntémonos qué ocurriría si B fuera distinto de C. Por extensionalidad, B y C no tendrían los mismos elementos, es decir, habría por lo menos un objeto x tal que o bien

$$x \in B \text{ y } x \notin C$$

o bien

$$x \notin B \text{ y } x \in C.$$

Pero esto es imposible; lo primero porque B no tiene elementos y lo segundo porque C no los tiene.

Observemos que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. La razón es ésta: $\emptyset$ carece de elementos, mientras que $\{\emptyset\}$ tiene un elemento, a saber, $\emptyset$.

Observemos también que el conjunto vacío está incluido en todo conjunto, es decir, para todo conjunto A, $\emptyset \subseteq A$. Pues en otro caso hay un conjunto A tal que $\emptyset \nsubseteq A$, de modo que hay por lo menos un objeto x tal que $x \in \emptyset$ y $x \notin A$. Pero esto es imposible, ya que $\emptyset$ no tiene elementos.

3. El principio de separación

Supongamos que Φ es una propiedad. En los casos habituales, Φ determina un conjunto, es decir, hay un conjunto A (y por extensionalidad sólo uno) cuyos elementos son exactamente aquellos objetos que tienen la propiedad Φ. Ahora bien, como veremos en seguida, no es cierto que toda propiedad determine un conjunto. Hay propiedades tales que no hay ningún conjunto cuyos elementos sean los objetos que poseen la propiedad.

Digamos que un conjunto es *normal* si no es un elemento de sí mismo y digamos que es *anormal* si es un elemento de sí mismo. Con toda precisión:

$$A \text{ es normal} \quad \text{sii} \quad A \notin A,$$

$$A \text{ es anormal} \quad \text{sii} \quad A \in A.$$

Es fácil dar ejemplos de conjuntos normales. El conjunto H de los seres humanos es normal, ya que H no es un ser humano, es decir, $H \notin H$. También es normal el conjunto $\{1, 3, 5\}$, ya que este conjunto no es un número. De hecho, todos los conjuntos que solemos considerar son normales, pero si supusiéramos que toda propiedad determina un conjunto, sería fácil dar un ejemplo de un conjunto anormal: el conjunto de todos los conjuntos. (Como veremos más adelante, no existe un conjunto tal.)

Mostraremos que la propiedad de ser un conjunto normal no determina ningún conjunto. Lo haremos por reducción al absurdo, suponiendo que hay un conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos normales y obteniendo una contradicción. Supongamos, pues, que hay un conjunto, llamémosle C, cuyos elementos son todos los conjuntos normales. Así,

$$C = \{x : x \text{ es un conjunto normal}\}.$$

Como cualquier conjunto, C es normal o es anormal, pero no ambas cosas. Ahora bien,

1. si C es normal, entonces C pertenece al conjunto de los conjuntos normales, es decir $C \in C$. Pero esto significa que C es anormal;
2. si C es anormal, entonces C no pertenece al conjunto de los conjuntos normales, es decir $C \notin C$. Pero esto significa que C es normal.

Así, C es normal si y sólo si es anormal, lo cual es contradictorio. Esta contradicción ha sido obtenida a partir de la suposición de que la propiedad de ser un conjunto normal determina un conjunto. Podemos, pues, concluir que esta propiedad no determina ningún conjunto. Para mayor perspicuidad reformulamos este resultado.

PROPOSICIÓN 1.1. *No hay ningún conjunto cuyos elementos sean todos los conjuntos normales y sólo ellos.*

Según cierta concepción (como vemos insostenible) de qué son los conjuntos, toda propiedad determina un conjunto. Para esta concepción, la proposición recién demostrada es fatal. Ésta es la razón de que a veces en la literatura lógica y filosófica se haga referencia a esta proposición como a la *paradoja de Russell*, en honor al lógico y filósofo británico Bertrand Russell, que la descubrió en 1901. En esta concepción (contradictoria) de los conjuntos se considera que toda propiedad divide el universo (es decir, la totalidad de los objetos, incluidos los conjuntos) en dos conjuntos: el conjunto de los objetos que poseen la propiedad y el de los que no la poseen. La concepción actual de los conjuntos, que aquí presentamos, es, en cierto modo, más modesta: no se pretende dividir *todo* el universo, del que sólo tenemos una idea muy parcial, en dos conjuntos; pero si ya disponemos de un conjunto A y consideramos una propiedad cualquiera Φ, entonces sí podemos dividir A con la ayuda de Φ, es decir, podemos formar los conjuntos $\{x : x \in A \text{ y } \Phi(x)\}$ y $\{x : x \in A \text{ y } \text{no}\,\Phi(x)\}$. Éste es el contenido del siguiente principio.

PRINCIPIO DE SEPARACIÓN. *Si A es un conjunto y Φ es una propiedad, entonces hay un conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos de A que tienen la propiedad Φ.*

Para referirnos al conjunto de los elementos de A que tienen la propiedad Φ, introducimos la notación

$$\{x \in A : \Phi(x)\}.$$

Es decir,

$$\{x \in A : \Phi(x)\} = \{x : x \in A \text{ y } \Phi(x)\}.$$

El principio de separación nos permite obtener el conjunto vacío a partir de cualquier otro conjunto. Pues si A es un conjunto cualquiera y Φ es una propiedad que ningún elemento de A posee (por ejemplo, la propiedad de ser un objeto distinto de sí mismo o la de no pertenecer a A), entonces, por el principio de separación, podemos formar el conjunto $\{x \in A : \Phi(x)\}$ de los elementos de A que poseen la propiedad Φ. Pero como ningún elemento de A posee la propiedad Φ, este conjunto carece de elementos, es el conjunto vacío:

$$\emptyset = \{x \in A : \Phi(x)\}.$$

Así,

$$\emptyset = \{x \in A : x \neq x\} = \{x \in A : x \notin A\}.$$

En presencia del principio de separación, podemos adaptar el argumento de la paradoja de Russell para mostrar que el universo no es un conjunto. Esto es lo que afirma la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.2. *No hay ningún conjunto universal, es decir, no hay ningún conjunto cuyos elementos sean todos los objetos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, en busca de una contradicción, que hay un conjunto universal, llamémosle U. Así, todo objeto y, en particular, todo conjunto, pertenece a U. Si aplicamos el principio de separación a U y a la propiedad de ser un conjunto normal, obtenemos un conjunto B tal que para todo objeto x,

$$x \in B \text{ sii } x \in U \text{ y } x \text{ es un conjunto normal.}$$

Así, por ser B un objeto,

$$B \in B \text{ sii } B \in U \text{ y } B \text{ es un conjunto normal.} \tag{1.1}$$

Naturalmente, $B \in B$ o $B \notin B$, pero no ambas cosas. Sin embargo

1. si $B \in B$, entonces, por definición de normalidad, B es anormal y así, por (1.1), $B \notin B$;
2. si $B \notin B$, entonces, por definición de normalidad, B es un conjunto normal. Además, por ser U universal, $B \in U$. Así, por (1.1), $B \in B$.

Es decir, $B \in B$ si y sólo si $B \notin B$, lo cual es contradictorio. Esta contradicción la hemos obtenido a partir de la suposición de que existe un conjunto al que todos los objetos pertenecen. Podemos, pues, concluir, que esta suposición es falsa, de modo que no hay ningún conjunto universal. □

Con esta misma demostración podemos concluir que no hay ningún conjunto cuyos elementos sean todos los conjuntos. Además, modificándola ligeramente, podemos mostrar que, dado un conjunto A, el conjunto $\{x \in A : x \notin x\}$ no es un elemento de A.

4. Ejercicios

1. Denote por enumeración (si es posible) cada uno de los siguientes conjuntos. Si en algún caso es imposible, diga por qué lo es.

   $A =$ el conjunto de los satélites naturales de la Tierra,

   $B =$ el conjunto de los enteros no negativos,

   $C = \{x : x \text{ es un entero y } 3 \leq x < 8\}$,

   $D = \{x : x \text{ es un entero y } x + x = x\}$,

   $E = \{x : x \text{ es un entero y } x + x = 0\}$.

2. Denote por comprensión los siguientes conjuntos:

   $$F = \{2,4,6,8\}, \quad G = \{0\}, \quad H = \{-2,2\}, \quad I = \{1\}.$$

3. ¿Cuántos elementos tienen los siguientes conjuntos?

$$J=\{2,2+2,4\},\quad K=\{1,2,1,3\},\quad L=\{1,\{1\}\},\quad M=\{\{1\},\{1,1\}\}.$$

4. ¿Es posible que $\{a,b\}=\{a\}$. Si no lo es, ¿por qué no? Si lo es, ¿en qué caso o en qué casos?

5. Denote de un modo más simple los siguientes conjuntos:

$$\{x : x=a\},\qquad \{x : x=a \text{ o } x=b\}.$$

6. Si A,B,C,D son los conjuntos de números de cuatro cifras de las cuales, respectivamente,
   (a) por lo menos dos son ceros,
   (b) por lo menos una es cero,
   (c) a lo sumo una es cero,
   (d) exactamente dos son ceros,

   ¿cuáles de estos conjuntos están incluidos en cuáles?

7. Sean

$$A_1=\{1,\{3\}\},\quad A_2=\{1,3\},\quad A_3=\{\{1\},\{3\}\},$$
$$A_4=\{1\},\quad A_5=\{1,\{1\},\{3\}\},\quad A_6=\{1,\emptyset\}.$$

   ¿Cuáles de estos conjuntos están incluidos en cuáles? ¿Hay alguno que sea elemento de otro?

8. Sean

$$X=\{1,2,3,4\},\quad Y=\{\{1,2\},\{3,4\}\},\quad Z=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}.$$

   ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas?

$$1\in X,\quad 1\in Y,\quad 1\in Z,$$
$$\{1\}\in X,\quad \{1\}\in Y,\quad \{1\}\in Z,\quad \{1\}\subseteq X,\quad \{1\}\subseteq Y,\quad \{1\}\subseteq Z,$$
$$\{3,4\}\in X,\quad \{3,4\}\in Y,\quad \{3,4\}\in Z,\quad \{3,4\}\subseteq X,\quad \{3,4\}\subseteq Y,\quad \{3,4\}\subseteq Z.$$

9. Halle todos los subconjuntos de cada uno de los conjuntos siguientes.

$$A=\{1,2,3\},\ B=\{1,2\},\ C=\{1\},\ D=\emptyset,\ E=\{1,\{2\}\},\ F=\{\emptyset\}.$$

10. De los tres conjuntos siguientes,

$$X=\{1,\emptyset\},\ Y=\{\emptyset\},\ Z=\emptyset,$$

   ¿cuál es elemento de cuál? ¿cuál es un subconjunto de cuál?

11. ¿Cuántos elementos tienen los siguientes conjuntos? ¿cuántos subconjuntos?

   $A=\{1,2,3,4\}$,
   $B=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$,
   $C=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$,
   $D=\{\emptyset,1,2,3,4\}$.

12. ¿Cuántos elementos y cuántos subconjuntos tiene cada uno de los conjuntos siguientes?

   $A=\emptyset$,
   $B=\{\emptyset\}$,
   $C=\{\{\emptyset\}\}$,
   $D=\{\{\emptyset\},\emptyset\}$.

13. Suponga que A es un conjunto que está incluido en todos los conjuntos. Concluya que $A=\emptyset$. Así, $\emptyset$ es el único conjunto que está incluido en todo conjunto.

14. Muestre que no hay ningún conjunto cuyos elementos sean todos los conjuntos.

15. Sea A un conjunto cualquiera. El principio de separación nos garantiza la existencia del conjunto B definido por

$$B=\{x\in A : x\notin x\}.$$

   Muestre que $B\notin A$. (Naturalmente, si x no es conjunto, entonces $x\notin x$, por lo que si A es un conjunto ninguno de cuyos elementos es un conjunto, $B=A$, es decir $A=\{x\in A : x\notin x\}$.)

Capítulo 2

OPERACIONES CON CONJUNTOS



1. Las operaciones básicas

Dados dos o más conjuntos, podemos combinar sus elementos y obtener, en general, nuevos conjuntos a partir de ellos. Los modos más simples de combinación se obtienen con ayuda de las operaciones de unión, intersección y diferencia que ahora definimos.

La **unión** de dos conjuntos A y B, en símbolos, $A \cup B$, es el conjunto cuyos elementos son los objetos que pertenecen a A o a B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Así, para todo objeto x,

$$x \in A \cup B \text{ sii } x \in A \text{ o } x \in B.$$

La **intersección** de dos conjuntos A y B, en símbolos, $A \cap B$, es el conjunto cuyos elementos son los objetos que pertenecen tanto a A como a B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Así, para todo objeto x,

$$x \in A \cap B \text{ sii } x \in A \text{ y } x \in B.$$

La **diferencia** de dos conjuntos A y B, en símbolos, $A - B$, es el conjunto cuyos elementos son los objetos que pertenecen a A pero no a B:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

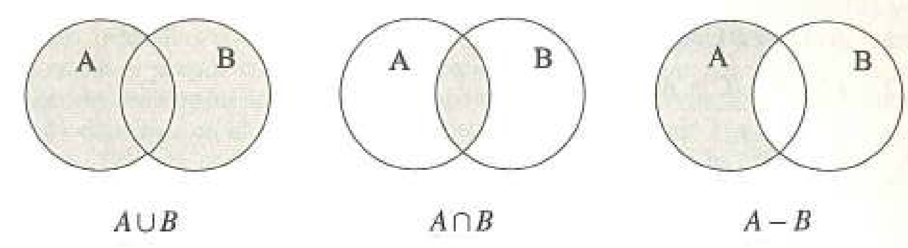
Así, para todo objeto x,

$$x \in A - B \text{ sii } x \in A \text{ y } x \notin B.$$

Obsérvese que para todo objeto x,

$$x \notin A \cup B \text{ sii } x \notin A \text{ y } x \notin B,$$
$$x \notin A \cap B \text{ sii } x \notin A \text{ o } x \notin B,$$
$$x \notin A - B \text{ sii } x \notin A \text{ o } x \in B.$$

Si representamos los conjuntos A y B como regiones circulares en el plano, los conjuntos correspondientes a su unión, intersección y diferencia son representados por las zonas sombreadas de los siguientes diagramas:



EJEMPLOS

1. Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{3,5,6,7\}$, entonces

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad A \cap B = \{3,5\}, \quad A - B = \{1,2,4\}.$$

2. Si A es el conjunto de los números de dos cifras la primera de las cuales es 1 y B es el conjunto de los números de dos cifras la segunda de las cuales es 1, entonces

$$A \cup B = \{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,21,31,41,51,61,71,81,91\},$$
$$A \cap B = \{11\},$$
$$A - B = \{10,12,13,14,15,16,17,18,19\}.$$

OBSERVACIONES

1. Decimos que dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen ningún elemento en común. Así A y B son disjuntos si y sólo si $A \cap B = \emptyset$. Si A y B son disjuntos, también decimos que A *es disjunto* de B y que B *es disjunto* de A.
2. Cuando decimos que un objeto x pertenece a A o a B, queremos decir que pertenece por lo menos a uno de los dos conjuntos, no excluyendo que pueda pertenecer a ambos. Si en algún momento queremos expresar que un objeto x pertenece a A o a B, pero no a ambos, lo diremos explícitamente.
3. El conjunto de los objetos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos es, naturalmente,

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

o, de modo equivalente,

$$(A - B) \cup (B - A).$$

PROPIEDADES DE LA UNIÓN

Para cualesquiera conjuntos A, B y C,

1. $A \cup B = B \cup A$,
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
3. $A \cup \emptyset = A$,
4. $A \cup A = A$,
5. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$,
6. si X es un conjunto tal que $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$, entonces $A \cup B \subseteq X$,
7. $A \subseteq B$ sii $A \cup B = B$.

La primera igualdad expresa que la unión es una operación *conmutativa*, la segunda que es *asociativa* y la cuarta que es *idempotente*. La justificación de las cuatro primeras igualdades es inmediata a partir de la definición de unión (y de la del conjunto vacío). Las propiedades (5) y (6), también inmediatas a partir de las definiciones, caracterizan la unión $A \cup B$ como el *menor* conjunto que incluye a A y a B, pues (5) dice que la unión de dos conjuntos incluye cada uno de ellos, mientras que (6) dice que es el menor conjunto que los incluye.

El punto (7), que nos proporciona una definición de la inclusión en términos de la unión, es el único que requiere justificación. Para justificarlo, hemos de mostrar que (i) si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$ y (ii) si $A \cup B = B$, entonces $A \subseteq B$. Verifiquemos (i) en primer lugar. Si $A \subseteq B$, entonces, ya que $B \subseteq B$ (reflexividad de la inclusión), (6) nos permite concluir (tomando $X = B$) que $A \cup B \subseteq B$. Pero por (5), $B \subseteq A \cup B$. Así, por el principio de extensionalidad, $A \cup B = B$. Verifiquemos ahora (ii). Por (5), $A \subseteq A \cup B$. Así, si $A \cup B = B$, podemos concluir que $A \subseteq B$.

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

Para cualesquiera conjuntos A, B y C,

1. $A \cap B = B \cap A$,
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$,
4. $A \cap A = A$,
5. $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$,
6. si X es un conjunto tal que $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$, entonces $X \subseteq A \cap B$,
7. $A \subseteq B$ sii $A \cap B = A$.

La primera igualdad expresa que la intersección es una operación *conmutativa*, la segunda que es *asociativa* y la cuarta que es *idempotente*. La justificación de las cuatro primeras igualdades es inmediata a partir de la definición de intersección (y de la del conjunto vacío). Las propiedades (5) y (6), también inmediatas a partir de las definiciones, caracterizan la intersección $A \cap B$ como el *mayor* conjunto que incluido A y en B, pues (5) dice que la intersección de dos conjuntos es un conjunto incluido en cada uno de ellos, mientras que (6) dice que es el mayor conjunto incluido en ambos. Como en el caso de la unión, (7) nos proporciona una definición de la inclusión en términos de la intersección. Su justificación es análoga a la del punto (7) de la unión, por lo que la dejamos como ejercicio.

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA

Las propiedades básicas de la unión y de la intersección presentan una clara analogía, que, como ahora veremos, no se extiende al caso de la diferencia.

1. La diferencia no es conmutativa,
2. la diferencia no es asociativa,
3. $A - \emptyset = A$, $\emptyset - A = \emptyset$,
4. $A - A = \emptyset$,
5. $A - B \subseteq A$ y $(A - B) \cap B = \emptyset$,
6. si X es un conjunto tal que $X \subseteq A$ y $X \cap B = \emptyset$, entonces $X \subseteq A - B$,
7. $A \subseteq B$ sii $A - B = \emptyset$.

Que la diferencia no es conmutativa significa que hay conjuntos A, B tales que $A - B \neq B - A$. Es claro que los hay, pues, por ejemplo,

$$\{2,3\} - \{3,4\} = \{2\}, \quad \text{pero} \quad \{3,4\} - \{2,3\} = \{4\}.$$

Que la diferencia no es asociativa significa que hay conjuntos A, B, C tales que $(A - B) - C \neq A - (B - C)$. Los hay, pues, por ejemplo,

$$(\{1,2\} - \{2,3\}) - \{1\} = \emptyset \quad \text{pero} \quad \{1,2\} - (\{2,3\} - \{1\}) = \{1\}.$$

La justificación de los puntos (3), (4), (5) y (6) es clara. Las propiedades (5) y (6) caracterizan la diferencia $A - B$ como el *mayor* conjunto incluido en A y disjunto de B, pues (5) dice que la diferencia entre dos conjuntos es un conjunto incluido en el primero y disjunto del segundo, mientras que (6) dice que es el mayor conjunto que cumple ambas condiciones. Como en los casos de la unión y de la intersección, (7) nos proporciona una definición de la inclusión en términos de la diferencia (y del conjunto vacío). Su justificación es simple: Que $A \subseteq B$ significa que todo elemento de A pertenece a B. Pero esto es equivalente a decir que no hay ningún objeto que pertenezca a A y no a B,

es decir, que no hay ningún objeto que pertenezca a $A-B$, o sea que $A-B$ no tiene elementos: $A-B=\emptyset$.

OBSERVACIONES

1. Hemos visto que la diferencia no es conmutativa. Podemos preguntarnos, sin embargo, si hay conjuntos A y B tales que $A-B=B-A$. De hecho, no es difícil ver que esto ocurre cuando, y sólo cuando, A es igual a B. En otras palabras, para cualesquiera conjuntos A y B,

$$A-B=B-A \quad \text{sii} \quad A=B.$$

2. En cuanto a la no asociatividad de la diferencia, para cualesquiera conjuntos A, B y C se cumple que

$$(A-B)-C \subseteq A-(B-C)$$

y que

$$A-(B-C)=((A-B)-C)\cup(A\cap C).$$

De esta igualdad y del hecho (obvio) que los conjuntos $(A-B)-C$ y $A\cap C$ son disjuntos podemos concluir que

$$(A-B)-C=A-(B-C) \quad \text{sii} \quad A\cap C=\emptyset.$$

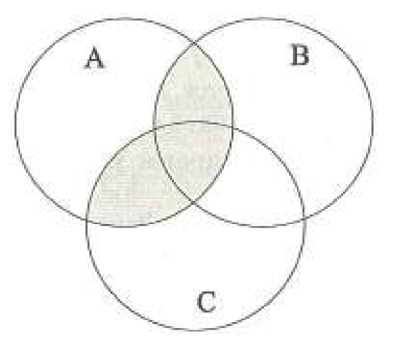
La justificación completa de estos hechos se deja como ejercicio.

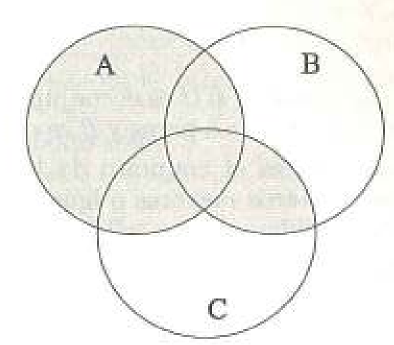
RELACIONES ENTRE LAS OPERACIONES BÁSICAS

Para cualesquiera conjuntos A, B, C y D,

1.a. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
1.b. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
2.a. $(A\cup B)\cap(C\cup D)=(A\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap C)\cup(B\cap D)$,
2.b. $(A\cap B)\cup(C\cap D)=(A\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup C)\cap(B\cup D)$,
3.a. $A\cap(A\cup B)=A$,
3.b. $A\cup(A\cap B)=A$,
4.a. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$,
4.b. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$,
5.a. $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$,
5.b. $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$.

La igualdad (1.a) expresa la *propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión*, mientras que (1.b) es la *propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección*. Su justificación no presenta dificultades. El diagrama de la izquierda ayuda a visualizar la igualdad (1.a) y el de la derecha la (1.b):





La igualdad (2.a) se obtiene aplicando dos veces (1.a) y usando la conmutatividad y la asociatividad de $\cap$ y de $\cup$. De modo análogo se obtiene (2.b) a partir de (1.b). La igualdad (3.a) se sigue de la propiedad (7) de la intersección y del hecho que $A\subseteq A\cup B$. Del mismo modo, pero usando que $A\cap B\subseteq A$, obtenemos (3.b) con ayuda de la propiedad (7) de la inclusión. Para justificar (4.a), recuérdese que para cualquier objeto a,

$$a\notin(B\cap C) \quad \text{sii } a\notin B \text{ o } a\notin C$$

y para (4.b) que

$$a\notin(B\cup C) \quad \text{sii } a\notin B \text{ y } a\notin C.$$

Las ecuaciones (5.a) y (5.b), que es provechoso comparar con (4.a) y (4.b), se justifican sin dificultad.

2. Complementación

Por la proposición 1.2 sabemos que no hay ningún conjunto universal, es decir, ningún conjunto al que todo objeto pertenezca. Ahora bien, normalmente no estamos interesados en la totalidad de los objetos, sino sólo en los objetos de una cierta clase, en los elementos de un determinado conjunto. Cuando hablamos de aritmética, estamos interesados en los números enteros, cuando hablamos de elecciones, estamos interesados en los miembros con derecho a voto de cierta comunidad, cuando hacemos consideraciones estadísticas, nos limitamos a una población determinada, etc.

Así, fijamos un conjunto al que pertenecen todos los objetos en que estamos interesados (temporalmente, en una aplicación determinada). Nos referimos a este conjunto como al **universo del discurso** (porque contiene todos los objetos de que hablamos, todos los objetos sobre los que discurrimos) y

lo denotamos mediante la letra «U». Los conjuntos que nos interesan son los subconjuntos de U.

Si A es un subconjunto de U, el **complemento** o **complementario** de A con respecto a U, en símbolos, $\overline{A}^U$, es el conjunto de todos los elementos de U que no pertenecen a A; o sea,

$$\overline{A}^U = U - A.$$

Por ejemplo, si U es el conjunto de los números enteros, A es el conjunto de los números enteros pares y B es el conjunto de los números enteros negativos, entonces $\overline{A}^U$ es el conjunto de los números enteros impares y $\overline{B}^U$ el de los números enteros mayores o iguales que cero.

No olvidemos que *sólo tiene sentido hablar del complemento con respecto a un cierto universo del discurso.* Si A es un conjunto, no hay ningún «complemento absoluto» de A, es decir, no hay ningún conjunto que contenga todos los objetos que no pertenecen a A. Un modo de verlo es éste: si lo hubiera, al formar su unión con el conjunto A obtendríamos un conjunto universal (que, por la proposición 1.2, sabemos que no existe).

Propiedades del complemento

Fijemos un universo del discurso U y consideremos sólo subconjuntos de U. Para no recargar la expresión, diremos simplemente *complemento* en vez de *complemento con respecto a U* y omitiremos sistemáticamente el superíndice U. Es decir, para todo subconjunto A de U,

$$\overline{A} = \overline{A}^U.$$

Tenemos que

1. $\overline{\emptyset} = U$ y $\overline{U} = \emptyset$,
2. $\overline{\overline{A}} = A$,
3. $A \cap \overline{A} = \emptyset$,
4. Si X es un subconjunto de U tal que $A \cap X = \emptyset$ entonces $X \subseteq \overline{A}$,
5. $A \cup \overline{A} = U$,
6. Si X es un conjunto tal que $A \cup X = U$, entonces $\overline{A} \subseteq X$,
7. $\overline{A}$ es el único conjunto X tal que (i) $A \cap X = \emptyset$ y (ii) $A \cup X = U$.

Los seis primeros puntos, cuya justificación es casi inmediata a partir de las definiciones, tienen un contenido especialmente claro. (1) dice que el conjunto vacío y el universo del discurso son conjuntos mutuamente complementarios. (2) dice que todo conjunto es el complemento de su propio complemento. De acuerdo con los puntos (3) y (4), el complemento de un conjunto A es el *mayor* subconjunto de U disjunto de A, mientras que, según (5) y (6), el

complemento de A es el *menor* conjunto cuya unión con A es U. El punto (7) caracteriza el complemento de A como el *único* conjunto disjunto de A cuya unión con A es U. Podemos justificar (7) con ayuda de los puntos anteriores así:

Que $\overline{A}$ cumple las condiciones (i) y (ii) es el contenido de (3) y (5). Veamos ahora que $\overline{A}$ es el único conjunto que las cumple, es decir, que si X es un conjunto que cumple (i) y (ii), entonces $X = \overline{A}$. Ahora bien, si X cumple (i), entonces, por (4), $X \subseteq \overline{A}$, mientras que si X cumple (ii), entonces, por (6), $\overline{A} \subseteq X$. Así, si X cumple (i) y (ii), $X = \overline{A}$.

Otras propiedades básicas del complemento son:

8. $A \subseteq B$ sii $\overline{B} \subseteq \overline{A}$,
9. $A = B$ sii $\overline{A} = \overline{B}$,
10. $A \cap B = \emptyset$ sii $A \subseteq \overline{B}$,
11. $A \cup B = U$ sii $\overline{A} \subseteq B$,
12. $A - B = A \cap \overline{B}$.

La justificación de (8) es inmediata: si todo elemento de A pertenece a B, todo objeto que no pertenece B tampoco pertenece a A; y viceversa. El punto (9) se sigue de (8) y (2). Por su parte, (10) y (11) son extensiones fácilmente justificables de (4) y (6), respectivamente. Finalmente, la igualdad (12) es una definición trivial (pero útil) de la diferencia en términos de la conjunción y el complemento.

De interés especial son las cuatro propiedades siguientes, las dos primeras de las cuales son las **leyes de De Morgan**.

13. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
14. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
15. $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$,
16. $A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$.

Podemos expresar las leyes de De Morgan (13) y (14) en palabras así: el complemento de una intersección es la unión de los complementos y el complemento de una unión es la intersección de los complementos. Obsérvese que estas dos leyes son reformulaciones de las relaciones (4.a) y (4.b) entre la unión, la intersección y la diferencia. La igualdad (15) se obtiene a partir de (13); pues si aplicamos (9) a (13) obtenemos

$$\overline{\overline{(A \cap B)}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Así, puesto que, por (2), $\overline{\overline{(A \cap B)}} = A \cap B$, obtenemos (15). Del mismo modo obtenemos (16) a partir de (14), con ayuda de (9) y (2).

Obsérvese que la igualdad (15) es una definición de la intersección en términos de la unión y el complemento, y que (16) es una definición de la unión en términos de la intersección y el complemento.

3. El conjunto potencia

El **conjunto potencia** de un conjunto A, en símbolos, $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Así:

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \subseteq A\}.$$

Este es nuestro primer ejemplo natural de un conjunto de conjuntos, es decir, de un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

EJEMPLOS

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$,
$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$,
$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Relacionemos el número de elementos de estos conjuntos con los de sus conjuntos potencia.

Número de elementos de A	Número de elementos de $\mathcal{P}(A)$
0	$1\ (=2^0)$
1	$2\ (=2^1)$
2	$4\ (=2^2)$
3	$8\ (=2^3)$

En general, un conjunto de n elementos, tiene 2^n subconjuntos y, por tanto, su conjunto potencia tiene 2^n elementos. Para ver por qué esto es así, basta mostrar que el conjunto vacío tiene un solo subconjunto (lo cual es inmediato) y que al añadir un elemento a un conjunto finito el número de subconjuntos se dobla. Ahora bien, si $x \notin A$ y $B = A \cup \{x\}$, entonces los subconjuntos de B pueden dividirse en dos clases: aquellos a los que no pertenece x y aquellos a los que x pertenece. Los primeros son precisamente los subconjuntos de A, mientras que los segundos se obtienen añadiendo x a cada uno de los subconjuntos de A. Así, en ambas clases hay el mismo número de subconjuntos, tantos como subconjuntos de A. Por consiguiente, el número de subconjuntos de B, la suma de los números de conjuntos en ambas clases, es el doble del número de subconjuntos de A.

De la definición de conjunto potencia se sigue que para todo conjunto A y todo conjunto X,

$$X \in \mathcal{P}(A) \text{ sii } X \subseteq A.$$

Por otro lado, sabemos que para todo objeto a,

$$a \in A \text{ sii } \{a\} \subseteq A.$$

Por consiguiente,

$$a \in A \text{ sii } \{a\} \in \mathcal{P}(A).$$

Además, para todo conjunto A,

$$A \in \mathcal{P}(A) \text{ y } \emptyset \in \mathcal{P}(A).$$

4. Uniones e intersecciones generalizadas

A menudo, por razones de eufonía, en vez de «conjunto de conjuntos» diremos «colección de conjuntos». Así, una **colección de conjuntos** es un conjunto todos cuyos elementos son conjuntos. Naturalmente, todo conjunto potencia es una colección de conjuntos. También lo es $\emptyset$.

Para mayor perspicuidad, usaremos letras mayúsculas caligráficas ($\mathcal{C}, \mathcal{D}, \ldots$) para referirnos a colecciones de conjuntos. En términos técnicos, nos serviremos de estas letras como *variables de colecciones de conjuntos*.

Si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos, la **unión** de $\mathcal{C}$, en símbolos, $\bigcup \mathcal{C}$, es el conjunto cuyos elementos son los objetos que pertenecen a algún conjunto de $\mathcal{C}$. Así, para todo objeto x,

(2.1) $$x \in \bigcup \mathcal{C} \text{ sii hay algún } A \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in A.$$

Podemos definir fácilmente la operación de unión de dos conjuntos en términos de la unión de una colección de conjuntos, ya que la unión de los conjuntos A y B es la unión de la colección $\{A, B\}$:

$$\bigcup \{A, B\} = A \cup B.$$

Más generalmente, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos cualesquiera, entonces

$$\bigcup \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Además,

$$\bigcup \{A\} = A \text{ y } \bigcup \emptyset = \emptyset.$$

PROPOSICIÓN 2.1. *Si $\mathcal{C}$ es una colección cualquiera de conjuntos, $\bigcup \mathcal{C}$ es el menor conjunto que incluye a cada elemento de $\mathcal{C}$. Es decir,*

(1) *para todo $A \in \mathcal{C}$, $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ y*
(2) *si B es un conjunto tal que $A \subseteq B$, para todo $A \in \mathcal{C}$, entonces $\bigcup \mathcal{C} \subseteq B$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C una colección de conjuntos.

(1) Si $A \in C$, entonces todo elemento de A pertenece a algún elemento de C, a saber, a A. Así, por definición de la unión de una colección de conjuntos, todo elemento de A pertenece a $\bigcup C$. Esto significa que $A \subseteq \bigcup C$.

(2) Supongamos que B es un conjunto que incluye a cada elemento de C. Si x es un elemento cualquiera de $\bigcup C$, hay $A \in C$ tal que $x \in A$. Pero, por suposición, $A \subseteq B$. Así, $x \in B$. Dado que x es un elemento arbitrario de $\bigcup C$, concluimos que todo elemento de $\bigcup C$ pertenece a B, de modo que $\bigcup C \subseteq B$. □

Obsérvese que las propiedades básicas (5) y (6) de la unión constituyen un caso particular de esta proposición. Para verlo, basta tomar $C = \{A,B\}$. Obsérvese también que para toda colección de conjuntos C y todo objeto x,

(2.2) $$x \notin \bigcup C \text{ sii para todo } A \in C,\ x \notin A.$$

Si C es una colección *no vacía* de conjuntos, la **intersección** de C, en símbolos, $\bigcap C$, es el conjunto cuyos elementos son los objetos que pertenecen a todos los conjuntos de C. Así, para todo objeto x,

(2.3) $$x \in \bigcap C \text{ sii para todo } A \in C,\ x \in A.$$

Como en el caso de la unión, tenemos que

$$\bigcap\{A,B\} = A \cap B$$

y, en general,

$$\bigcap\{A_1,A_2,\ldots,A_n\} = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n,$$

de modo que

$$\bigcap\{A\} = A.$$

Obsérvese que para toda colección no vacía de conjuntos C y para todo objeto x,

(2.4) $$x \notin \bigcap C \text{ sii hay algún } A \in C \text{ tal que } x \notin A.$$

¿Por qué en la definición de intersección de una colección de conjuntos exigimos que la colección no sea vacía? Porque si aplicáramos la definición de intersección a la colección vacía $\emptyset$, entonces $\bigcap\emptyset$ sería un conjunto universal, que, por la proposición 1.2, sabemos que no existe. Veamos que todo objeto debería pertenecer a $\bigcap\emptyset$. Sea x un objeto cualquiera. Si $x \notin \bigcap\emptyset$, por (2.4) hay un conjunto $A \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Pero esto es imposible, ya que $\emptyset$ carece de elementos. Así $x \in \bigcap C$.

También como en el caso de la unión, se cumple la proposición siguiente, de la que las propiedades básicas (5) y (6) de la intersección constituyen un caso particular.

PROPOSICIÓN 2.2. *Si C es una colección no vacía de conjuntos, $\bigcap C$ es el mayor conjunto incluido en cada elemento de C. Es decir,*

(1) *para todo $A \in C$, $\bigcap C \subseteq A$ y*

(2) *si B es un conjunto tal que $B \subseteq A$, para todo $A \in C$, entonces $B \subseteq \bigcap C$.*

La demostración de esta proposición es análoga a la de la proposición 2.1, por lo que la dejamos como ejercicio.

Las leyes de De Morgan (propiedades (13) y (14) del complemento) pueden generalizarse a la unión y a la intersección de colecciones de conjuntos. Fijemos un universo del discurso U. Si C es una colección de subconjuntos de U, podemos considerar la colección cuyos elementos son los complementos de los conjuntos que pertenecen a C. Una manera perspicua de denotar esta colección es:

$$\{\overline{A} : A \in C\}.$$

Obviamente, esta colección lo es también de subconjuntos de U. Además, no es vacía si C no lo es.

PROPOSICIÓN 2.3. (LEYES DE DE MORGAN) *Si C es una colección no vacía de subconjuntos de U, entonces*

(a) $\overline{\bigcup C} = \bigcap\{\overline{A} : A \in C\}$,

(b) $\overline{\bigcap C} = \bigcup\{\overline{A} : A \in C\}$.

DEMOSTRACIÓN. Observemos en primer lugar que, para todo objeto x,

(1) $x \in \bigcap\{\overline{A} : A \in C\}$ sii para todo $A \in C$, $x \in \overline{A}$, y

(2) $x \in \bigcup\{\overline{A} : A \in C\}$ sii hay algún $A \in C$ tal que $x \in \overline{A}$.

Para justificar (a), debemos mostrar que los conjuntos $\overline{\bigcup C}$ y $\bigcap\{\overline{A} : A \in C\}$ tienen los mismos elementos. Ahora bien, si x es un elemento del universo del discurso U, entonces $x \in \overline{\bigcup C}$ sii $x \notin \bigcup C$, o sea, por (2.2), sii para todo $A \in C$, $x \notin A$; es decir,

$$x \in \overline{\bigcup C} \text{ sii para todo } A \in C,\ x \in \overline{A}.$$

Pero esto, por (1), es equivalente a decir que $x \in \bigcap\{\overline{A} : A \in C\}$.

La justificación de (b) es análoga, apelando a (2.4) y a (2) en lugar de (2.2) y (1). Por ello la dejamos como ejercicio. □

5. Sobre la existencia de conjuntos

¿Cómo justificamos que los conjuntos que hemos estudiado hasta ahora existen? Sólo hemos mencionado dos principios sobre conjuntos, el de extensionalidad y el de separación. El principio de extensionalidad no nos permite concluir la existencia de ningún conjunto. El principio de separación nos garantiza la existencia de aquellos subconjuntos de un conjunto dado cuyos elementos poseen una determinada propiedad. Así, si ya disponemos de un conjunto A, el principio de separación nos permite concluir, como ya vimos, que existe un conjunto sin elementos, nos garantiza, pues, la existencia del conjunto vacío. Si A y B son conjuntos, podemos apelar al principio de separación para mostrar que $A \cap B$ y $A-B$ también lo son, ya que $A \cap B$ es el conjunto de los elementos de A que tienen la propiedad de pertenecer a B, mientras que $A-B$ es el conjunto de los elementos de A que tienen la propiedad de no pertenecer a B. En todo caso, para poner en funcionamiento el principio de separación debemos disponer de por lo menos un conjunto. Así, hasta ahora hemos hecho uso de lo que podemos llamar el *principio de no vacuidad*, que dice que hay por lo menos un conjunto.

Estos dos principios de existencia de conjuntos (el de no vacuidad y el de separación) no son suficientes para dar cuenta de todos los conjuntos que hemos estudiado. No nos permiten formar el par de dos objetos, ni la unión de dos conjuntos, ni la unión de una colección de conjuntos, ni el conjunto potencia de un conjunto cualquiera. Sin embargo, todas nuestras necesidades de existencia de conjuntos son satisfechas con unos pocos principos o, como suele decirse, *axiomas* más, a saber: *el axioma del par*, que afirma la existencia del par, $\{a,b\}$, de dos objetos cualesquiera a, b, el *axioma de la unión*, que afirma la existencia de la unión, $\bigcup C$, de cualquier colección de conjuntos C y el *axioma del conjunto potencia*, que nos garantiza la existencia del conjunto potencia, $\mathcal{P}(A)$, de cualquier conjunto A. Veamos cómo obtener, con la ayuda de estos principios o axiomas introducidos, todos los conjuntos de que nos hemos ocupado.

Dados A y B, obtenemos $A \cup B$ así: con ayuda del axioma del par, formamos el conjunto $\{A,B\}$, que es, pues, una colección de conjuntos. El axioma de la unión nos permite obtener ahora el conjunto $\bigcup\{A,B\}$. Pero, como ya sabemos, $\bigcup\{A,B\} = A \cup B$.

Dado un objeto a, obtenemos inmediatamente el conjunto unitario $\{a\}$ por el axioma del par, ya que, por extensionalidad, $\{a\} = \{a,a\}$, el par de los objetos a y a. Dados los objetos a, b y c, podemos obtener el conjunto $\{a,b,c\}$ en dos pasos. Primero formamos $\{a,b\}$ y $\{c\}$ y a continuación unimos estos estos dos conjuntos, $\{a,b\} \cup \{c\} = \{a,b,c\}$. Ahora podemos obtener, dado un nuevo objeto d, el conjunto $\{a,b,c,d\}$ así: formamos $\{a,b,c\}$ y $\{d\}$ y luego los unimos, $\{a,b,c\} \cup \{d\} = \{a,b,c,d\}$. Es claro que este procedimiento nos permite formar, dado un número finito de objetos $a_1,a_2,\ldots,a_n$, el conjunto $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.

Nos queda por mostrar cómo obtener el complemento de un conjunto respecto a un universo del discurso y la intersección de una colección no vacía

de conjuntos. Ahora bien, el complemento de un conjunto A respecto a un universo U no es más que la diferencia $U-A$, que ya sabemos cómo obtener por el axioma o principio de separación a partir de U y de A. En cuanto a la intersección de una colección no vacía de conjuntos C, procedemos así: por ser C no vacío, podemos elegir arbitrariamente un conjunto $A \in C$. Pero entonces vemos que $\bigcap C$ no es más que el conjunto de los elementos de A que tienen la propiedad de pertenecer a todos los conjuntos en C, de modo que obtenemos $\bigcap C$ mediante una aplicación del axioma de separación.

He aquí la lista de los principios básicos sobre conjuntos en que se basa nuestro desarrollo:

1. **Axioma de no vacuidad.** *Hay por lo menos un conjunto.*
2. **Axioma de extensionalidad.** *Si A y B son conjuntos con los mismos elementos, entonces $A = B$.*
3. **Axioma de separación.** *Si A es un conjunto y Φ es una propiedad, hay un conjunto, $\{x \in A : \Phi(x)\}$, cuyos elementos son los elementos de A que tienen la propiedad Φ.*
4. **Axioma del par.** *Si a y b son objetos cualesquiera, hay un conjunto, $\{a,b\}$, cuyos elementos son a y b.*
5. **Axioma de la unión.** *Si C es una colección de conjuntos, hay un conjunto, $\bigcup C$, cuyos elementos son los objetos que pertenecen a algún conjunto de C.*
6. **Axioma del conjunto potencia.** *Si A es un conjunto, hay un conjunto, $\mathcal{P}(A)$, cuyos elementos son los subconjuntos de A.*

A esta lista sólo deberemos añadirle un principio más, el *axioma de infinitud*, que afirma la existencia de un conjunto infinito. Pero todavía no es momento de comentarlo, ya que con las herramientas de que ahora disponemos no podemos siquiera precisar qué es un conjunto infinito. Lo haremos en el capítulo 5.

6. Ejercicios

1. Muestre que $A \cup (A \cap B) = A$ y que $A \cap (A \cup B) = A$.
2. Muestre que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
3. Muestre que $(A \cup B) - B = A$ sii A y B son disjuntos.
4. Muestre que $A - (A \cap B) = A - B$.
5. Muestre que $A - B = B - A$ sii $A = B$.
6. Muestre que $A - B = A$ sii A y B son disjuntos.
7. Muestre que $A - B = B$ sii $A = B = \emptyset$.

8. Muestre que $A \cap B = A \cup B$ sii $A = B$.

9. Muestre que $A \cap B = A - B$ sii $A = \emptyset$.

10. Muestre que $A \cup B = A - B$ sii $B = \emptyset$.

11. Muestre que si A, B y C son conjuntos tales que $A \cap B = A \cap C$ y $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$.

12. Muestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C,

$$(A - B) - C \subseteq A - (B - C).$$

13. Muestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C,

$$A - (B - C) = ((A - B) - C) \cup (A \cap C).$$

14. Muestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C,

$$(A - B) - C = A - (B - C) \quad \text{sii} \quad A \cap C = \emptyset.$$

15. La **diferencia simétrica** entre dos conjuntos A y B es el conjunto $A \triangle B$ definido por:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Muestre que

(a) $A \triangle B = B \triangle A$,
(b) $A \triangle B = \emptyset$ sii $A = B$,
(c) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

16. Muestre que $A - (A - B) = A \cap B$.

17. Muestre que $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.

18. Muestre que $(A \cup B) - (A - B) = B$.

19. Muestre que $((A - B) \cap (C - B)) \cup (A - (B \cup C)) = A - B$.

20. Calcule

(a) $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$
(b) $\mathcal{P}(\{1,\{2\}\})$
(c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
(d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$.

21. Muestre que si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

22. Muestre que si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces $A \subseteq B$.

23. Muestre que $A = B$ sii $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

24. Si sabemos que $\mathcal{P}(A)$ tiene un único elemento, ¿qué podemos concluir acerca de A?

25. Muestre que para cualesquiera conjuntos A y B, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

26. Muestre que para cualesquiera conjuntos A y B, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

27. Muestre que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ sii $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

28. Muestre que si $A \in \mathcal{P}(B)$, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

29. Muestre que si $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$, entonces $A = B$.

30. Muestre que si $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$, entonces $A = B$.

31. ¿Es posible hallar conjuntos A y B tales que $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A - B)$? Justifique la respuesta.

32. Sea $C = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$. Calcule $\bigcup C$ y $\bigcap C$.

33. Si $C = \mathcal{P}(A)$, ¿qué conjuntos son $\bigcup C$ y $\bigcap C$?

34. Sea A un conjunto no vacío y sea C el conjunto de todos los subconjuntos unitarios de A, es decir

$$C = \{\{x\} : x \in A\}.$$

Verifique que $\bigcup C = A$. Observe también que si A tiene por lo menos dos elementos, entonces $\bigcap C = \emptyset$.

35. Sean C y $\mathcal{D}$ colecciones de conjuntos. Muestre que

(a) si $C \subseteq \mathcal{D}$, entonces $\bigcup C \subseteq \bigcup \mathcal{D}$,
(b) si $C \subseteq \mathcal{D}$ y $C \neq \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{D} \subseteq \bigcap C$.

36. Muestre que si A es un conjunto y C es una colección de conjuntos, entonces $A \cap \bigcup C$ es la unión de la colección de conjuntos cuyos elementos son todas las intersecciones de A con los elementos de C:

$$(2.5) \qquad A \cap \bigcup C = \bigcup \{A \cap X : X \in C\}.$$

En otras palabras, muestre que para todo objeto x,

$$x \in A \cap \bigcup C \text{ sii hay algun } X \in C \text{ tal que } x \in A \cap X.$$

Podemos referirnos a (2.5) como a la *propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión generalizada.*

37. Muestre que si A es un conjunto y C es una colección no vacía de conjuntos, entonces $A \cup \bigcap C$ es la intersección de la colección de conjuntos cuyos elementos son todas las uniones de A con los elementos de C:

(2.6) $$A \cup \bigcap C = \bigcap \{A \cup X : X \in C\}.$$

En otras palabras, muestre que para todo objeto x,

$$x \in A \cup \bigcap C \text{ sii para todo } X \in C,\ x \in A \cup X.$$

Podemos referirnos a (2.6) como a la *propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección generalizada.*

CAPÍTULO 3
RELACIONES

1. Introducción

Si A es un conjunto de objetos, a toda propiedad Φ de la que tenga sentido preguntarse si los elementos de A la poseen le corresponde, por el principio de separación, un subconjunto de A, el conjunto $\{x \in A : \Phi(x)\}$. Podemos, pues, usar el lenguaje de los conjuntos para hablar de propiedades de los elementos de A; si Φ es una propiedad y B es el conjunto que le corresponde, en vez de decir que un objeto tiene la propiedad Φ, diremos que es un elemento de B.

Pero no sólo queremos hablar de propiedades de los elementos de A. También nos importa expresar que ciertos elementos de A están en cierta relación. En general, esto no podemos lograrlo sólo con la ayuda de subconjuntos de A, pero sí con la ayuda de conjuntos obtenidos a partir de A. Para ver cómo hacerlo, observamos que las relaciones tienen, por así decir, una dirección; una relación se da entre pares de objetos, pero en cierto orden. Por ejemplo, si a es padre de b, la relación de paternidad se da entre a y b, pero no se da entre b y a. Así, no podemos decir simplemente que la relación se da entre los elementos del par $\{a,b\}$, sino que se da entre a y b, *en este orden*. Para poder elaborar una teoría de relaciones debemos, pues, disponer de un modo de expresar con precisión esta direccionalidad de las relaciones, su dependencia del orden.

Para ello introducimos el concepto de par ordenado. Daremos una regla para obtener, pada cada par de objetos a y b, un nuevo objeto, $\langle a,b\rangle$, el *par ordenado de a y b*, que nos permitirá distinguir su *primer componente*, a, de su *segundo componente*, b. Lo que esto significa es que para cualesquiera objetos a,b,c,d,

(3.1) $$\text{si } \langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle, \text{ entonces } a=c \text{ y } b=d.$$

Que cumpla (3.1) es el único requisito que exigimos del par ordenado. Esto corresponde a la idea intuitiva de que ser un par ordenado no es más que desempeñar una cierta función: la de distinguir su primer de su segundo componente. Lo que haremos a continuación es construir el par ordenado $\langle a,b\rangle$ como un conjunto a partir de los objetos a y b.

Una vez tengamos los pares ordenados a nuestra disposición podremos definir una relación como un conjunto de pares ordenados. Así, concebiremos

la relación de paternidad como el conjunto de los pares ordenados $\langle a,b\rangle$ tales que a es padre de b. De este modo, las relaciones entre los elementos de un conjunto A también serán conjuntos, pero no conjuntos de elementos de A, sino conjuntos de pares ordenados de elementos de A.

2. Pares ordenados

Antes de dar la definición de par ordenado queremos observar que el par («desordenado») $\{a,b\}$ no cumple la condición (3.1), ya que para cualesquiera objetos a,b, $\{a,b\}=\{b,a\}$, mientras que de (3.1) se sigue inmediatamente que si $a\neq b$, entonces $\langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$.

LEMA 3.1. *$\{a,b\}=\{c,d\}$ sii ($a=c$ y $b=d$) o ($a=d$ y $b=c$).*

DEMOSTRACIÓN. Vemos en primer lugar que si ($a=c$ y $b=d$) o ($a=d$ y $b=c$) entonces, por el principio de extensionalidad, $\{a,b\}=\{c,d\}$.

Verifiquemos ahora la condición inversa. Supongamos que $\{a,b\}=\{c,d\}$, con la intención de mostrar que ($a=c$ y $b=d$) o ($a=d$ y $b=c$). Consideremos dos casos: $a=b$ o $a\neq b$.

Si $a=b$, entonces b es el único elemento de $\{a,b\}$ y, dado que $\{a,b\}=\{c,d\}$, b es el único elemento de $\{c,d\}$, de manera que $a=b=c=d$. Así ($a=c$ y $b=d$) o ($a=d$ y $b=c$).

Pasemos al segundo caso ($a\neq b$). En primer lugar, de que $\{a,b\}=\{c,d\}$ se sigue que ($a=c$ o $a=d$) y ($b=c$ o $b=d$). Esto da lugar a cuatro subcasos:

$$(1)\ a=c \text{ y } b=c,\quad (2)\ a=c \text{ y } b=d,\quad (3)\ a=d \text{ y } b=c,\quad (4)\ a=d \text{ y } b=d.$$

Por hallarnos en el segundo caso ($a\neq b$), (1) y (4) son imposibles. Así, también en este segundo caso, ($a=c$ y $b=d$) o ($a=d$ y $b=c$). □

Estamos ya en disposición de dar nuestra definición de par ordenado, debida al lógico y matemático polaco Kazimierz Kuratowski (1921).

El **par ordenado** de a y b es, por definición, el conjunto

$$\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Decimos que a es el **primer componente** y b el **segundo componente** del par ordenado $\langle a,b\rangle$. Así, $\langle a,b\rangle$ es el conjunto cuyos elementos son el conjunto unitario $\{a\}$ y el par $\{a,b\}$. Desde luego, esta definición no captura ninguna idea previa acerca de lo que debe ser el par ordenado. Lo único que importa de ella es que satisface la condición (3.1), como mostramos a continuación.

PROPOSICIÓN 3.2. *Si $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$, entonces $a=c$ y $b=d$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$, es decir, supongamos que

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$$

con la intención de concluir que $a=c$ y $b=d$. De acuerdo con el lema anterior, hay dos casos posibles:

1. $\{a\}=\{c\}$ y $\{a,b\}=\{c,d\}$,
2. $\{a\}=\{c,d\}$ y $\{a,b\}=\{c\}$.

En el caso (2), vemos que $a=c=d$ y $a=b=c$; es decir, $a=b=c=d$, de modo que $a=c$ y $b=d$. En el caso (1), tenemos, en primer lugar, que $a=c$ y, en segundo lugar, nuevamente por el lema, o bien $a=c$ y $b=d$, y ya hemos concluido; o bien $a=d$ y $b=c$. Pero entonces, dado que $a=c$, también $b=d$. Así, en cualquier caso, $a=c$ y $b=d$. □

OBSERVACIONES

1. Podríamos haber dado otras definiciones del concepto de par ordenado que, si bien son incompatibles con la de Kuratowski, también satisfacen la condición (3.1). Así, si definimos

$$[a,b]=\{\{a,1\},\{b,2\}\},$$

podemos mostrar que

$$\text{si } [a,b]=[c,d], \text{ entonces } a=c \text{ y } b=d.$$

Ésta es la definición de par ordenado del matemático alemán Felix Hausdorff (1914).

2. Otra posible definición es:

$$\ll a,b\gg\ =\{\{a\},\{b,\emptyset\}\},$$

que es una versión simplificada de la propuesta por el matemático norteamericano Norbert Wiener (1914). Es una definición aceptable, ya que también satisface la condición (3.1):

$$\text{si } \ll a,b\gg\ =\ \ll c,d\gg, \text{ entonces } a=c \text{ y } b=d.$$

3. Pero no es aceptable definir el par ordenado como

$$(a,b)=\{\{a\},b\},$$

puesto que no cumple la condición (3.1), ya que $(1,\{2\})=(2,\{1\})$.

PRODUCTOS CARTESIANOS

Si A y B son conjuntos cualesquiera, el **producto cartesiano** de A por B, en símbolos, $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados cuyo primer componente es un elemento de A y cuyo segundo componente es un elemento de B; en símbolos,

$$A \times B = \{\langle x,y\rangle : x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

Por consiguiente, para cualesquiera objetos x,y,

$$\langle x,y\rangle \in A \times B \quad \text{sii} \quad x \in A \text{ y } y \in B.$$

Por ejemplo, si $A = \{1,2\}$ y $B = \{2,3,4\}$,

$$A \times B = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle\},$$

mientras que

$$B \times A = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}.$$

Observemos que si A es un conjunto de n elementos y B uno de m elementos, entonces $A \times B$ tiene $n \cdot m$ elementos, ya que cada elemento de A es el primer componente de m pares ordenados cuyo segundo componente pertenece a B.

Si A es vacío, no hay ningún par ordenado cuyo primer componente sea un elemento de A. Por consiguiente, con independencia de qué conjunto sea B, el producto cartesiano de A por B es vacío. De modo análogo vemos que $A \times B$ es vacío si B lo es. Por otra parte, si ni A ni B son vacíos, tampoco lo es $A \times B$, ya que si $a \in A$ y $b \in B$, entonces $\langle a,b\rangle \in A \times B$. Hemos justificado, pues, que

1. $A \times B = \emptyset$ sii $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

El producto cartesiano *no es conmutativo*, es decir, hay conjuntos A y B tales que $A \times B \neq B \times A$. Para verlo, basta tomar A y B distintos y no vacíos, como en el ejemplo anterior. Podemos preguntarnos en qué casos el orden de los factores no altera el producto cartesiano, es decir, para qué conjuntos A y B, $A \times B = B \times A$. Esto ocurre si uno de los factores es $\emptyset$, ya que en tal caso el producto es vacío: con independencia de qué conjunto sea X, $\emptyset \times X = \emptyset = X \times \emptyset$. Ahora bien, si ninguno de los conjuntos es vacío o, lo que, por (1), es lo mismo, si el producto cartesiano no es vacío, entonces el orden de los factores siempre altera el producto (a no ser, naturalmente, que los dos factores sean el mismo conjunto). La razón es simple: si $A \neq B$, o bien hay $x \in A - B$ o bien hay $y \in B - A$. Como ni A ni B son vacíos, sean $a \in A$, $b \in B$. En el primer caso, $\langle x,b\rangle \in (A \times B) - (B \times A)$. En el segundo caso, $\langle y,a\rangle \in (B \times A) - (A \times B)$. En cualquier caso, $A \times B \neq B \times A$. Así pues,

2. Si $A \times B \neq \emptyset$ y $A \times B = B \times A$, entonces $A = B$.

3. Relaciones

Como dijimos en la introducción a este capítulo, identificaremos las relaciones con conjuntos de pares ordenados. Que un par ordenado pertenezca a una relación significará que la relación en cuestión se da entre el primer componente del par y el segundo. Así, estipulamos formalmente que una **relación** es un conjunto de pares ordenados.

Usaremos las letras mayúsculas «R», «S» y «T», posiblemente con subíndices, para referirnos a relaciones. Es decir, estas letras nos servirán como *variables de relación*.

Si R es una relación, escribimos a menudo

$$aRb$$

en vez de

$$\langle a,b\rangle \in R$$

y decimos que a **está relacionado con** b (por R) o que la relación R **se da entre** a y b. Para expresar que a **no está relacionado con** b (por R) o que R **no se da entre** a y b escribimos

$$\langle a,b\rangle \notin R \qquad \text{o} \qquad a \not R b.$$

EJEMPLOS

1. El conjunto
$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$$
es una relación. Con respecto a ella, 1 está relacionado con 2 y con 5, mientras que 2 lo está consigo mismo y con 4, es decir, $1R2$, $1R5$, $2R2$ y $2R4$. Pero 2 no está relacionado con 1, o sea, $2 \not R 1$. Tampoco está 5 relacionado con 1, ni 4 con 2, es decir, $5 \not R 1$ y $4 \not R 2$.
2. El conjunto S de pares de seres humanos
$$S = \{\langle x,y\rangle : x \text{ es madre de } y\}$$
es una relación. Naturalmente, xSy si y sólo si x es madre de y.

Por ser conjuntos, las relaciones cumplen el principio de extensionalidad. Puesto que los elementos de una relación son pares ordenados, esto significa que las relaciones R y S son la misma si y sólo si a ellas pertenecen los mismos pares. En otras palabras, $R = S$ si y sólo si, para cualesquiera objetos x,y,

$$\langle x,y\rangle \in R \text{ sii } \langle x,y\rangle \in S.$$

El **dominio** de una relación R, en símbolos, dom(R), es el conjunto de los primeros componentes de los pares de R. El **recorrido** de R, rec(R), es el conjunto de los segundos componentes de los pares de R. El **campo** de R,

campo(R), es la unión de su dominio y su recorrido, es decir el conjunto de todos los componentes de los pares de R. Así, para todo objeto a,

$a \in \text{dom}(R)$ sii hay algún objeto b tal que aRb,
$a \in \text{rec}(R)$ sii hay algún objeto b tal que bRa,
$a \in \text{campo}(R)$ sii hay algún objeto b tal que aRb o bRa.

Si A es un conjunto, decimos que R es **una relación en** A si R es un conjunto de pares ordenados de elementos de A. En otras palabras,

$$R \text{ es una relación en } A \text{ sii } R \subseteq A \times A.$$

En todo conjunto A siempre podemos definir las relaciones siguientes:

1. $\text{Id}_A = \{\langle x,x \rangle : x \in A\}$, la **relación de identidad** en A,
2. $\emptyset$, la **relación nula** en el conjunto A,
3. $A \times A$, la **relación total** en A.

Claramente $\emptyset \subseteq \text{Id}_A$ y $\text{Id}_A \subseteq A \times A$. Estas relaciones son iguales si y sólo si $A = \emptyset$. Las tres son distintas si y sólo si A posee dos o más elementos. Si A posee un único elemento, entonces $\text{Id}_A = A \times A \neq \emptyset$. $\emptyset$ es la menor relación en el conjunto A y $A \times A$ es la mayor, es decir, si R es una relación cualquiera en A, entonces $\emptyset \subseteq R$ y $R \subseteq A \times A$.

Ejemplos

1. El dominio, el recorrido y el campo de la relación nula es el conjunto vacío.
2. El dominio, el recorrido y el campo de las relaciones de identidad y total en un conjunto A son todos el propio conjunto A.
3. Si $R = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$, el dominio de R es el conjunto $\{1,2,3\}$, su recorrido es el conjunto $\{2,3,4\}$ y su campo es $\{1,2,3,4\}$. R es una relación en cualquier conjunto que incluya a $\{1,2,3,4\}$.

Operaciones con relaciones

La unión, la intersección y la diferencia de dos conjuntos de pares ordenados son también conjuntos de pares ordenados. Así, si R y S son relaciones, también lo son los conjuntos $R \cup S$, $R \cap S$ y $R - S$. Naturalmente, para cualesquiera objetos a, b,

$\langle a,b \rangle \in R \cup S$ sii $\langle a,b \rangle \in R$ o $\langle a,b \rangle \in S$,
$\langle a,b \rangle \in R \cap S$ sii $\langle a,b \rangle \in R$ y $\langle a,b \rangle \in S$,
$\langle a,b \rangle \in R - S$ sii $\langle a,b \rangle \in R$ y $\langle a,b \rangle \notin S$.

En otras palabras,

$a(R \cup S)b$ sii aRb o aSb,
$a(R \cap S)b$ sii aRb y aSb,
$a(R - S)b$ sii aRb y no aSb.

Más generalmente, si C es una colección no vacía de relaciones, los conjuntos $\bigcup C$ y $\bigcap C$ también son relaciones. Para cualesquiera objetos a, b,

$\langle a,b \rangle \in \bigcup C$ sii hay alguna relación $R \in C$ tal que $\langle a,b \rangle \in R$,
$\langle a,b \rangle \in \bigcap C$ sii para toda relación $R \in C$, $\langle a,b \rangle \in R$.

A partir de una relación R obtenemos $\widetilde{R}$, la **relación inversa** de R, que se da entre los objetos a y b si y sólo si R se da entre b y a. Con toda precisión,

$$\widetilde{R} = \{\langle x,y \rangle : \langle y,x \rangle \in R\}.$$

Así, para cualesquiera objetos a y b

$$a\widetilde{R}b \quad \text{sii} \quad bRa.$$

Es claro que el dominio de $\widetilde{R}$ es el recorrido de R y el recorrido de $\widetilde{R}$ es el dominio de R.

A partir de dos relaciones R y S podemos obtener una nueva relación, su **producto relacional**, $R|S$, que definimos así:

$$R|S = \{\langle x,y \rangle : \text{hay algún } z \text{ tal que } \langle x,z \rangle \in R \text{ y } \langle z,y \rangle \in S\}.$$

Así, para cualesquiera objetos a, b,

$$a(R|S)b \text{ sii hay algún objeto } z \text{ tal que } aRz \text{ y } zSb.$$

Ejemplos

1. Si $R = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 5,3 \rangle\}$ y $S = \{\langle 5,1 \rangle, \langle 3,5 \rangle\}$, entonces
   (a) $\widetilde{R} = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,5 \rangle\}$,
   (b) $\widetilde{S} = \{\langle 1,5 \rangle, \langle 5,3 \rangle\}$,
   (c) $R|S = \{\langle 1,5 \rangle, \langle 5,5 \rangle\}$,
   (d) $S|R = \{\langle 3,3 \rangle, \langle 5,2 \rangle, \langle 5,3 \rangle\}$,
   (e) $R|R = \emptyset$,
   (f) $S|S = \{\langle 3,1 \rangle\}$.

2. Si definimos las relaciones P y H en un conjunto de seres humanos de modo que aPb si y sólo si a es padre o madre de b, y aHb si y sólo si a es hermano o hermana de b, entonces $a\widetilde{P}b$ sii a es hijo o hija de b; $a\widetilde{H}b$ sii a es hermano o hermana de b, de modo que $\widetilde{H} = H$; $a(H|P)b$ sii a es tío o tía de b; $a(\widetilde{P}|H)b$ sii a es sobrino o sobrina de b; $a(P|P)b$ sii a es abuelo o abuela de b y $a(\widetilde{P}|\widetilde{P})b$ sii a es nieto o nieta de b.
3. Con ayuda de la figura

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

definimos las relaciones R y S de modo que aRb sii a es un número situado inmediatamente a la izquierda de b, y aSb sii a es un número situado inmediatamente por debajo de b. Tenemos que, por ejemplo,

$$6\widetilde{R}5,\ 6\widetilde{S}10,\ 1(R|R)3,\ 6(R|S)3,\ 10(S|R)7,\ 7(\widetilde{R}|S)2,\ 3(\widetilde{S}|\widetilde{R})6.$$

PROPOSICIÓN 3.3. *Para cualesquiera relaciones R, S y T,*

(1) $\widetilde{\widetilde{R}} = R$,

(2) $R|(S|T) = (R|S)|T$,

(3) $\widetilde{(R|S)} = \widetilde{S}|\widetilde{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Ocupémonos de (1) en primer lugar. Por la definición de relación inversa, si a y b son objetos cualesquiera,

$$\begin{aligned} a\widetilde{\widetilde{R}}b \quad &\text{sii} \quad b\widetilde{R}a, \\ &\text{sii} \quad aRb. \end{aligned}$$

Pero esto significa que $\widetilde{\widetilde{R}} = R$.

Justifiquemos (2). Supongamos que $\langle x,y\rangle \in R|(S|T)$. De acuerdo con la definición de producto relacional, hay z tal que

$$\text{(i) } \langle x,z\rangle \in R \quad \text{y} \quad \text{(ii) } \langle z,y\rangle \in (S|T).$$

Por (ii), hay u tal que

$$\text{(iii) } \langle z,u\rangle \in S \quad \text{y} \quad \text{(iv) } \langle u,y\rangle \in T.$$

Así, por (i) y (iii), $\langle x,u\rangle \in (R|S)$ y finalmente, por (iv), $\langle x,y\rangle \in (R|S)|T$. Dado que $\langle x,y\rangle$ es un elemento arbitrario de $R|(S|T)$, concluimos que $R|(S|T) \subseteq (R|S)|T$.

De modo análogo podemos justificar la inclusión inversa y, por tanto, la igualdad.

Justifiquemos finalmente (3). Para cualquier par de objetos x,y,

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle \in \widetilde{(R|S)} \quad &\text{sii} \quad \langle y,x\rangle \in R|S, \\ &\text{sii} \quad \text{hay } z \text{ tal que } \langle y,z\rangle \in R \text{ y } \langle z,x\rangle \in S, \\ &\text{sii} \quad \text{hay } z \text{ tal que } \langle z,y\rangle \in \widetilde{R} \text{ y } \langle x,z\rangle \in \widetilde{S}, \\ &\text{sii} \quad \text{hay } z \text{ tal que } \langle x,z\rangle \in \widetilde{S} \text{ y } \langle z,y\rangle \in \widetilde{R}, \\ &\text{sii} \quad \langle x,y\rangle \in \widetilde{S}|\widetilde{R}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\widetilde{(R|S)} = \widetilde{S}|\widetilde{R}$. Así concluye la demostración de (3) y, con ella, la de la proposición. □

CUESTIONES DE EXISTENCIA

A lo largo de este capítulo hemos dado por supuesta la existencia de ciertos conjuntos, en particular del par ordenado de dos objetos cualesquiera, del producto cartesiano de dos conjuntos, del dominio, el recorrido y el campo de una relación, así como de la relación inversa de una relación cualquiera y del producto relacional de dos relaciones. A continuación indicamos cómo la existencia de estos conjuntos se sigue de los axiomas introducidos al final del capítulo anterior.

La existencia del par ordenado de dos objetos a y b se sigue del axioma del par. Con ayuda de este axioma obtenemos en primer lugar los conjuntos $\{a\}$ y $\{a,b\}$ y, a continuación, el conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$, es decir, el par $\langle a,b\rangle$.

Pasemos ahora al producto cartesiano de los conjuntos A y B. Digamos que un objeto x tiene la propiedad Φ si x es un par ordenado cuyo primer componente es un elemento de A y cuyo segundo componente es un elemento de B. Así, $A \times B$ es el conjunto de los objetos que tienen la propiedad Φ. Obtendremos este producto cartesiano con ayuda del axioma de separación. Para ello, basta encontrar un conjunto E al que pertenezcan todos los pares formados con elementos de A y B, pues entonces, $A \times B = \{x \in E : \Phi(x)\}$.

Para hallar E, observamos que si $a \in A$ y $b \in B$, entonces el conjunto unitario $\{a\}$ y el par $\{a,b\}$ son subconjuntos de $A \cup B$ y, en consecuencia, son elementos de $\mathcal{P}(A \cup B)$. Pero entonces, el par $\langle a,b\rangle$, que no es más que el conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$, es un subconjunto de $\mathcal{P}(A\cup B)$, es decir, es un elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Éste es, pues, el conjunto E que buscábamos, ya que a él pertenecen todos los elementos de $A \times B$. Por consiguiente,

$$A \times B = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : \Phi(x)\}.$$

Veamos ahora cómo obtener el dominio de una relación R. Como en el caso del producto cartesiano, basta que obtengamos un conjunto D al que pertenezcan todos los componentes de los pares en R, pues entonces obtenemos

dom(R) por el axioma de separación como el conjunto de los elementos de D que tienen la propiedad de ser primeros componentes de pares en R. Ahora bien, puesto que $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$, si $\langle a,b\rangle \in R$, los conjuntos $\{a\}$ y $\{a,b\}$ son elementos de un elemento de R, por lo que ambos pertenecen al conjunto $\bigcup R$. Pero entonces, los objetos a y b, que son elementos del par $\{a,b\}$, son elementos de un elemento de $\bigcup R$, es decir, son elementos de $\bigcup\bigcup R$. Éste es pues el conjunto D que buscábamos, ya que a él pertenecen todos los elementos de dom(R). Por consiguiente,

$$\text{dom}(R) = \{x \in \bigcup\bigcup R : x \text{ es el primer componente de un par en } R\}.$$

Del mismo modo obtenemos el recorrido y el campo de R, pues

$$\text{rec}(R) = \{x \in \bigcup\bigcup R : x \text{ es el segundo componente de un par en } R\},$$
$$\text{campo}(R) = \{x \in \bigcup\bigcup R : x \text{ es un componente de un par en } R\}.$$

Por lo que respecta a la relación inversa de R, observamos que $\widetilde{R} \subseteq \text{rec}(R) \times \text{dom}(R)$, un conjunto cuya existencia ya sabemos justificar. Pero entonces podemos formar $\widetilde{R}$ por separación, ya que $\widetilde{R}$ es el conjunto de los elementos de $\text{rec}(R) \times \text{dom}(R)$ que tienen la propiedad de ser pares ordenados $\langle a,b\rangle$ tales que $\langle b,a\rangle \in R$.

Finalmente, nos ocupamos del producto relacional. Puesto que

$$\text{dom}(R|S) \subseteq \text{dom}(R) \quad \text{y} \quad \text{rec}(R|S) \subseteq \text{rec}(S),$$

$R|S \subseteq \text{dom}(R) \times \text{rec}(S)$. Así, $R|S$ es el conjunto de los elementos de $\text{dom}(R) \times \text{rec}(S)$ que tienen la propiedad de ser pares ordenados $\langle a,b\rangle$ tales que hay algún objeto c para el cual $\langle a,c\rangle \in R$ y $\langle c,b\rangle \in S$. El axioma de separación nos garantiza la existencia de este conjunto.

4. Clases de relaciones

Una relación R es **reflexiva en un conjunto** A si y sólo si todo elemento de A está relacionado consigo mismo por R, es decir, si y sólo si para todo $x \in A$, xRx. Una relación R es **irreflexiva** si y sólo si ningún objeto está relacionado consigo mismo por R, es decir, si y sólo si para todo objeto x, $x\not R x$.

Así, si $A = \{1,2\}$, la relación

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$

es reflexiva en A, mientras que la relación

$$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$$

es irreflexiva.

Es posible que una relación no sea reflexiva ni irreflexiva en un conjunto dado. La razón es simple. Para que una relación R sea reflexiva en un conjunto

A, todo elemento de A debe estar relacionado consigo mismo por R, mientras que para que sea irreflexiva, ningún elemento debe estarlo. Pero que no todo elemento de A esté relacionado consigo mismo no implica que ninguno lo esté. Así, la relación

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$

no es reflexiva en el conjunto $\{1,2,3\}$, ya que, por ejemplo, $\langle 2,2\rangle \notin R$, pero tampoco es irreflexiva, ya que $\langle 1,1\rangle \in R$.

Una relación R es **simétrica** si y sólo si para cada par de objetos x,y,

si xRy, entonces yRx.

Una relación R es **asimétrica** si y sólo si para cada par de objetos x,y,

si xRy, entonces $y\not R x$.

Dicho de otro modo, R es asimétrica si y sólo si no hay ningún par de objetos x,y tales que xRy y yRx. Así, la relación

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$$

es simétrica, mientras que la relación

$$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$

es asimétrica.

Es posible que una relación no sea ni simétrica ni asimétrica. Que una relación R no sea simétrica significa que hay objetos a,b tales que $\langle a,b\rangle \in R$ y $\langle b,a\rangle \notin R$. Que no sea asimétrica significa que hay objetos c,d tales que $\langle c,d\rangle \in R$ y $\langle d,c\rangle \in R$. La relación

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle\}$$

cumple ambas cosas, por lo que no es ni simétrica ni asimétrica.

Observemos que *toda relación asimétrica es irreflexiva*, pues si a es un objeto tal que aRa, hay objetos x,y (de hecho, $x = y = a$) tales que xRy y yRx. Esto muestra que si R no es irreflexiva, tampoco es asimétrica, de modo que toda relación asimétrica debe ser irreflexiva.

Una relación R es **antisimétrica** si y sólo si para todo par de objetos x,y,

si xRy y yRx, entonces $x = y$.

Dicho de otro modo, R es antisimétrica si y sólo si no hay ningún par de objetos distintos x,y tales que xRy y yRx. Así,

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$

es una relación antisimétrica, ya que si xRy y yRx, entonces o bien $x = y = 1$ o bien $x = y = 2$, mientras que

$$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$

no es antisimétrica, ya que $1S2$, $2S1$ y $1 \neq 2$.

Vemos que la antisimetría es una condición más débil que la asimetría: que una relación R sea asimétrica significa que no hay ningún par de objetos a,b (iguales o distintos) tales que

$$aRb \text{ y } bRa, \tag{3.2}$$

mientras que R sea antisimétrica significa que no hay ningún par de objetos distintos que cumplen (3.2). Así, *toda relación asimétrica es antisimétrica.* Pero no toda relación antisimétrica es asimétrica. De hecho, no es difícil ver que *una relación es asimétrica si y sólo si es antisimétrica e irreflexiva.*

Una relación R es **transitiva** si y sólo si para cualesquiera objetos x,y,z,

$$\text{si } xRy \text{ y } yRz, \text{ entonces } xRz.$$

Así, las relaciones

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

y

$$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$

son transitivas.

Observemos que *para que una relación R no sea transitiva es necesario y suficiente que haya objetos a,b,c (distintos o no) tales que $\langle a,b\rangle \in R$, $\langle b,c\rangle \in R$, y $\langle a,c\rangle \notin R$.* Así, la relación

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$$

no es transitiva, ya que $\langle 2,1\rangle \in R, \langle 1,2\rangle \in R$ y $\langle 2,2\rangle \notin R$. Pero la relación

$$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$$

es transitiva, ya que ni siquiera hay objetos x,y,z tales que $\langle x,y\rangle \in S$ y $\langle y,z\rangle \in S$. Por la misma razón, también son transitivas la relación $\{\langle 1,2\rangle\}$ y la relación nula.

EJEMPLOS

1. Si $A = \{1,2,3\}$, la relación $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$

   (a) no es reflexiva en A, ya que $\langle 1,1\rangle \notin R$,
   (b) no es simétrica, ya que $\langle 1,2\rangle \in R$, pero $\langle 2,1\rangle \notin R$,
   (c) es transitiva,
   (d) no es irreflexiva, ya que $\langle 2,2\rangle \in R$,
   (e) no es asimétrica, ya que $\langle 2,2\rangle \in R$,
   (f) es antisimétrica.

2. Las relaciones $\leq^{\mathbb{N}}$ y $<^{\mathbb{N}}$ en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales definidas por

   $$n \leq^{\mathbb{N}} m \quad \text{sii} \quad n,m \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq m$$
   $$n <^{\mathbb{N}} m \quad \text{sii} \quad n,m \in \mathbb{N} \text{ y } n < m$$

   son ambas transitivas y antisimétricas. Además, $\leq^{\mathbb{N}}$ es reflexiva en $\mathbb{N}$, mientras que $<^{\mathbb{N}}$ es irreflexiva y asimétrica.
3. La relación S que se da entre cada número natural y su sucesor, es decir la relación

   $$S = \{\langle n,m\rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } m \in \mathbb{N} \text{ y } m = n+1\},$$

   es irreflexiva, asimétrica y antisimétrica.
4. La relación Id_A de identidad en un conjunto A es reflexiva en A, simétrica, transitiva y antisimétrica. La relación de diversidad en un conjunto A, es decir, la relación

   $$(A \times A) - \mathrm{Id}_A = \{\langle x,y\rangle : x \in A,\ y \in A,\ x \neq y\}$$

   es simétrica e irreflexiva. Es transitiva si y sólo si A tiene menos de dos elementos.
5. Si A es un conjunto cualquiera, la relación de inclusión ($\subseteq_A$) en $\mathcal{P}(A)$, el conjunto potencia de A, es decir, la relación definida por

   $$X \subseteq_A Y \quad \text{sii} \quad X \subseteq A,\ Y \subseteq A \text{ y } X \subseteq Y$$

   es reflexiva en $\mathcal{P}(A)$, antisimétrica y transitiva.

Observemos que no toda relación es de una de las seis clases consideradas. Por ejemplo, la relación R en el conjunto $A = \{1,2,3\}$ definida por

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

no es reflexiva en A (pues $\langle 2,2\rangle \notin R$) ni irreflexiva (pues $\langle 1,1\rangle \in R$) ni simétrica (pues $\langle 1,2\rangle \in R, \langle 2,1\rangle \notin R$) ni asimétrica ni antisimétrica (pues $\langle 2,3\rangle \in R$ y $\langle 3,2\rangle \in R$) ni transitiva (pues $\langle 2,3\rangle \in R$ y $\langle 3,2\rangle \in R$, pero $\langle 2,2\rangle \notin R$).

Damos ahora una caracterización compacta de las seis clases de relaciones consideradas que puede contribuir a su mejor comprensión.

PROPOSICIÓN 3.4. *Si R es una relación en un conjunto A, entonces*

(1) *R es reflexiva en A sii* $\mathrm{Id}_A \subseteq R$,
(2) *R es simétrica sii* $R = \widetilde{R}$,
(3) *R es transitiva sii* $R|R \subseteq R$,
(4) *R es irreflexiva sii* $R \cap \mathrm{Id}_A = \emptyset$,

(5) *R es asimétrica sii* $R \cap \widetilde{R} = \emptyset$,

(6) *R es antisimétrica sii* $R \cap \widetilde{R} \subseteq \mathrm{Id}_A$.

DEMOSTRACIÓN. Justificamos únicamente el punto (3), dejando los restantes como ejercicio.

Supongamos en primer lugar que R es una relación transitiva, con el objeto de mostrar que $R|R \subseteq R$. Si $\langle a,b\rangle \in R|R$, hay x tal que $\langle a,x\rangle \in R$ y $\langle x,b\rangle \in R$. Puesto que R es transitiva, $\langle a,b\rangle \in R$. Por ser $\langle a,b\rangle$ un elemento arbitrario de $R|R$, concluimos que $R|R \subseteq R$.

Supongamos, inversamente, que $R|R \subseteq R$ y concluyamos que R es transitiva. Sean a,b,c elementos cualesquiera de A tales que $\langle a,b\rangle \in R$ y $\langle b,c\rangle \in R$. Debemos mostrar que $\langle a,c\rangle \in R$. Dado que $\langle a,b\rangle \in R$ y $\langle b,c\rangle \in R$, tenemos que $\langle a,c\rangle \in R|R$. Pero, por suposición, $R|R \subseteq R$. Así $\langle a,c\rangle \in R$, como queríamos mostrar. □

5. Relaciones de equivalencia y particiones

La relación de identidad en un conjunto A es reflexiva en A, simétrica y transitiva. Hay muchas otras relaciones con estas tres propiedades, relaciones que corresponden a lo que podríamos llamar «igualdad en cierto aspecto». Relaciones de este tipo son las que se dan (1) entre automóviles de una *misma* marca, (2) entre números que dan el *mismo* resto al dividirlos por 2, (3) entre palabras castellanas que empiezan por la *misma* letra, (4) entre personas que viven en el *mismo* país, (5) entre personas que tienen la *misma* edad, etc. Este tipo de relaciones reciben el nombre de *relaciones de equivalencia*.

Una **relación de equivalencia** en un conjunto A es una relación reflexiva, simétrica y transitiva en A.

Toda relación de equivalencia en un conjunto nos permite clasificar los elementos del conjunto. Así, la relación R del ejemplo (3) nos permite clasificar las palabras castellanas, es decir, distribuirlas en clases, según su primera letra. Cada una de estas clases consta de todas las palabras que empiezan por una cierta letra. Tenemos, pues, la clase de las palabras que empiezan por la letra a, la de las palabras que empiezan por la letra b, etc. Todas las palabras de una misma clase están relacionadas por R y las de dos clases distintas no lo están. Toda palabra pertenece a una clase y sólo a una: por eso hablamos de clasificación.

Del mismo modo, la relación del ejemplo (2) en el conjunto de los números naturales definida por

$$n \equiv_2 m \text{ sii } n \text{ y } m \text{ dan el mismo resto al dividirlos por 2,}$$

nos permite clasificar los números naturales en dos clases: la de los pares y la de los impares, mientras que la relación análoga a ésta,

$$n \equiv_5 m \text{ sii } n \text{ y } m \text{ dan el mismo resto al dividirlos por 5,}$$

clasifica los números naturales en cinco clases, según su resto al dividirlos por 5 sea $0,1,2,3$ o 4:

A_0 (*resto* 0)	A_1 (*resto* 1)	A_2 (*resto* 2)	A_3 (*resto* 3)	A_4 (*resto* 4)
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

En la clasificación efectuada por la relación de identidad en un conjunto A, cada clase consta de un único elemento, ya que Id_A sólo relaciona cada objeto consigo mismo. En contraste con ello, en la clasificación correspondiente a $A \times A$, la relación total en A, que es una relación de equivalencia, hay una sola clase, a saber A, ya que todos los objetos de A están relacionados entre sí, por lo que todos pertenecen a la misma clase.

Definimos ahora con precisión el concepto de clasificación o, como se dice más habitualmente, de partición.

Una **partición** o una **clasificación** de un conjunto A es una colección de subconjuntos no vacíos de A, las llamadas **clases** de la partición, tal que todo elemento de A pertenece a una clase y sólo a una. Dicho de otro modo, una partición o clasificación de un conjunto A es una colección Π de subconjuntos de A tal que

(i) $\emptyset \notin \Pi$, es decir, no hay clases vacías;

(ii) si $X, Y \in \Pi$ y $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \emptyset$, es decir, las clases son disjuntas entre sí;

(iii) para todo $a \in A$ hay $X \in \Pi$ tal que $a \in X$, es decir, todo elemento de A pertenece a alguna clase.

EJEMPLOS

1. La colección $\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ es una partición del conjunto $\{1,2,3,4\}$. Otra partición del mismo conjunto es $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$.
2. Si X es el conjunto de los números pares e Y el de los números impares, entonces $\{X,Y\}$ es una partición del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.
3. Si A_a es el conjunto de las palabras castellanas que empiezan por la letra a, A_b el de las que empiezan por la letra b, etc., entonces la colección $\{A_a, A_b, A_c, \ldots, A_y, A_z\}$ es una partición del conjunto de las palabras castellanas.

4. La colección $\{\{a\} : a \in A\}$ es una partición del conjunto A.
5. La colección $\{A\}$ es una partición del conjunto A.

Veremos ahora que *toda relación de equivalencia en un conjunto A determina una partición de A*. De hecho, mostraremos cómo obtener una partición a partir de cualquier relación de equivalencia.

Fijemos, pues, un conjunto cualquiera A y una relación de equivalencia R en A. Para cada $a \in A$ sea $[a]_R$ el conjunto de todos los elementos de A relacionados con a; es decir,

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

Decimos que $[a]_R$ es la **clase de equivalencia de a** (respecto a R). Así:

(1) $x \in [a]_R$ sii xRa.

Por tanto, por ser R reflexiva,

(2) $a \in [a]_R$.

Además

(3) si aRb, entonces $[a]_R = [b]_R$.

Justifiquemos (3). Supongamos que aRb y sea $x \in [a]_R$. Así, xRa y, por transitividad de R, xRb. Por definición de $[b]_R$, $x \in [b]_R$. Así, por ser x un elemento arbitrario de $[a]_R$, $[a]_R \subseteq [b]_R$. De modo análogo podemos mostrar que $[b]_R \subseteq [a]_R$. Pero entonces, por extensionalidad, $[a]_R = [b]_R$.

(4) si $a\not{R}b$, entonces $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Justifiquemos (4). Si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, hay x tal que xRa y xRb. Pero entonces, por simetría y transitividad de R, aRb. Hemos visto, pues, que si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, entonces aRb. Pero esto equivale a decir que si $a\not{R}b$, entonces $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Sea A/R el conjunto de las clases de equivalencia respecto a R de todos los elementos de A, es decir,

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}.$$

Decimos que A/R es el **conjunto cociente** de A respecto a R.

El conjunto cociente de A respecto a R es una partición de A, ya que por (2) ninguna clase es vacía y, también por (2), todo elemento de A pertenece a alguna clase. Finalmente, las clases son disjuntas entre sí, puesto que si $[a]_R \neq [b]_R$, entonces, por (3), $a\not{R}b$ y así, por (4), $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$. Vemos, pues, que A/R es la partición buscada, **la partición de A determinada por R**. Resumimos este resultado en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.5. *Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, el conjunto cociente A/R es una partición de A.*

EJEMPLOS

1. Consideremos con detalle el caso de la relación $\equiv_5$ en $\mathbb{N}$. Tenemos que

$$\begin{array}{lllllllllll} A_0 & = & [0]_R & = & [5]_R & = & [10]_R & = & \cdots & = & [5n]_R & = & \cdots \\ A_1 & = & [1]_R & = & [6]_R & = & [11]_R & = & \cdots & = & [5n+1]_R & = & \cdots \\ A_2 & = & [2]_R & = & [7]_R & = & [12]_R & = & \cdots & = & [5n+2]_R & = & \cdots \\ A_3 & = & [3]_R & = & [8]_R & = & [13]_R & = & \cdots & = & [5n+3]_R & = & \cdots \\ A_4 & = & [4]_R & = & [9]_R & = & [14]_R & = & \cdots & = & [5n+4]_R & = & \cdots \end{array}$$

y que

$$\mathbb{N}/R = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}.$$

2. Si S es la relación en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ definida por

$$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 6,7\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 7,8\rangle\},$$

entonces la relación

$$R = S \cup \breve{S} \cup \mathrm{Id}_A$$

es una relación de equivalencia en A. (Para verlo, sólo hay que verificar que es transitiva, ya que es claramente simétrica y reflexiva en A.) Las clases de equivalencia de cada elemento son

$$\begin{array}{lllllll} [1]_R & = & [2]_R & = & \{1,2\}, & & \\ [3]_R & = & [4]_R & = & [5]_R & = & \{3,4,5\}, \\ [6]_R & = & [7]_R & = & [8]_R & = & \{6,7,8\}. \end{array}$$

El conjunto cociente es, pues:

$$A/R = \{\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}\}.$$

Acabamos de ver cómo obtener una partición a partir de una relación de equivalencia. Mostraremos ahora que, inversamente, *toda partición de un conjunto A da lugar a una relación de equivalencia en A*.

Supongamos, pues, que Π es una partición del conjunto A. Así todo elemento de A pertenece a una clase de la partición y sólo a una. Esto nos permite definir la relación R en A por

$$R = \{\langle a,b\rangle : a \text{ y } b \text{ pertenecen a una misma clase de } \Pi\}.$$

R es reflexiva en A, ya que todo elemento de A pertenece a una clase; es simétrica, ya que si a y b pertenecen a la misma clase, b y a pertenecen a la misma clase. Finalmente, R es transitiva, ya que si a y b pertenecen a una misma clase y b y c pertenecen a una misma clase, entonces, ya que todo elemento de A pertenece a una única clase, a, b y c (y, en particular, a y c) pertenecen a una misma clase. R es, pues, una relación de equivalencia, **la relación de equivalencia en A determinada por Π**. Resumimos este resultado en la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *Si Π es una partición de un conjunto A, entonces la relación R definida por*

$$aRb \text{ sii hay alguna clase } X \in \Pi \text{ tal que } a \in X \text{ y } b \in X$$

es una relación de equivalencia en A.

6. Relaciones de orden

Entre los elementos de un conjunto podemos establecer a veces cierta relación de precedencia o de orden. Todos estamos familiarizados con la relación que ordena los números naturales de menor a mayor, o con la relación de precedencia entre las personas que hacen cola ante una ventanilla. También podemos ordenar los subconjuntos de un conjunto con respecto a la relación de inclusión. Hay una diferencia importante entre esta última ordenación y la de los números naturales. Dados dos números naturales cualesquiera, uno de ellos es menor que el otro, mientras que en el caso de la inclusión nos encontramos con pares de conjuntos, como $\{2,3\}$ y $\{3,5,7\}$, que son incomparables con respecto a la inclusión: ninguno de ellos está incluido en el otro. Expresaremos esta diferencia diciendo que el orden de los números naturales es total, mientras que el orden de subconjuntos de un conjunto con respecto a la inclusión es sólo parcial.

Dejemos a un lado por ahora las diferencias y busquemos los puntos que estas relaciones tienen en común. Pero antes observemos que hay dos maneras de considerar el orden de los elementos de un conjunto: de modo estricto o de modo no estricto o reflexivo. Así, decimos que el número 3 es *estrictamente menor* que el número 5 ($3 < 5$) y también decimos que 3 es *menor o igual* que 5 ($3 \leq 5$). La diferencia esencial entre $<$ y $\leq$ es que ningún número es estrictamente menor que sí mismo, pero todo número es menor o igual que sí mismo. Por lo demás, las dos relaciones coinciden. Es decir, si $a \neq b$, entonces $a < b$ si y sólo si $a \leq b$.

Toda relación de orden (estricto o reflexivo) es transitiva: con independencia de que la precedencia sea estricta o reflexiva, si a precede a b y b precede a c, entonces a también precede a c. Por otra parte, es esencial a todo orden la ausencia de situaciones circulares: si a y b son objetos distintos, es imposible que a preceda a b y que, al mismo tiempo, b preceda a a. Puesto que ningún objeto es estrictamente menor que sí mismo, esto significa que toda relación de orden estricto es asimétrica, mientras que toda relación de orden reflexivo es antisimétrica. Así, pues, definimos:

Un **orden parcial reflexivo** en un conjunto A es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en A.

Un **orden parcial estricto** en un conjunto A es una relación asimétrica y transitiva en A.

Puesto que toda relación transitiva es asimétrica si y sólo si es irreflexiva, podemos concluir que *un orden parcial estricto en un conjunto A es una relación irreflexiva y transitiva en A.*

Ejemplos

1. Si A es el conjunto $\{1,2,3,4\}$, la relación

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\} \cup \mathrm{Id}_A$$

es un orden parcial reflexivo en A, mientras que la relación

$$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\}$$

es un orden parcial estricto en A.

2. La relación *menor o igual que* en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, en símbolos, $\leq^{\mathbb{N}}$, es un orden parcial reflexivo en $\mathbb{N}$. También lo son las relaciones análogas $\leq^{\mathbb{Z}}$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y $\leq^{\mathbb{Q}}$ en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Por su parte, la relación *menor que*, $<^{\mathbb{N}}$, en el conjunto $\mathbb{N}$ es un orden parcial estricto en $\mathbb{N}$. También lo son las relaciones análogas $<^{\mathbb{Z}}$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ y $<^{\mathbb{Q}}$ en el conjunto $\mathbb{Q}$.

3. Si A es un conjunto cualquiera, la relación de *inclusión* $\subseteq_A$ entre subconjuntos de A definida por

$$X \subseteq_A Y \quad \text{sii} \quad X \subseteq A,\ Y \subseteq A \text{ y } X \subseteq Y$$

es un orden parcial reflexivo en $\mathcal{P}(A)$, mientras que la relación de *inclusión propia* $\subset_A$ entre subconjuntos de A,

$$X \subset_A Y \quad \text{sii} \quad X \subseteq A,\ Y \subseteq A \text{ y } X \subset Y,$$

es un orden parcial estricto en $\mathcal{P}(A)$.

4. La relación D de *divisibilidad* en el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los números enteros positivos definida por

$$nDm \quad \text{sii} \quad n \text{ es un divisor de } m;$$
$$\text{sii} \quad \text{hay } k \geq 1 \text{ tal que } n \cdot k = m$$

es un orden parcial reflexivo en $\mathbb{Z}^+$. Por otro lado, la relación D' de *divisibilidad propia* en el conjunto $\mathbb{Z}^+$, definida por

$$nD'm \quad \text{sii} \quad n \neq m \text{ y } n \text{ es un divisor de } m;$$
$$\text{sii} \quad \text{hay } k > 1 \text{ tal que } n \cdot k = m$$

es un orden parcial estricto en $\mathbb{Z}^+$.

Podemos representar los órdenes parciales (reflexivos o estrictos) en un conjunto finito mediante diagramas. Así, el diagrama

representa el orden parcial estricto S en el conjunto $A = \{a,b,c,d,e,f\}$:

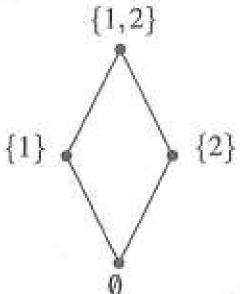
$$\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle,\langle d,f\rangle\}$$

y también representa el orden parcial reflexivo R en el mismo conjunto A definido por

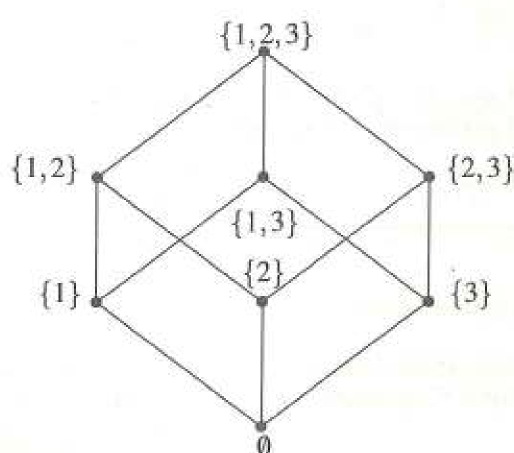
$$R = \mathrm{Id}_A \cup S.$$

El modo de interpretar los diagramas de este tipo es el siguiente: (1) xSy sii hay una línea ascendente (recta o quebrada) que va de x a y, y (2) xRy sii $x = y$ o hay una línea ascendente (recta o quebrada) que va de x a y.

Un diagrama adecuado para representar el orden parcial (reflexivo o estricto) de la inclusión en el conjunto $\mathcal{P}(\{1,2\})$, es decir el diagrama de los órdenes parciales $\subseteq_{\{1,2\}}$ y $\subset_{\{1,2\}}$, es



Un diagrama adecuado para representar los órdenes parciales de la inclusión, $\subseteq_{\{1,2,3\}}$, y de la inclusión propia, $\subset_{\{1,2,3\}}$, en el conjunto $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ es



Como dijimos al introducir el concepto de orden (y como se pone de manifiesto en el uso de un mismo diagrama para un orden reflexivo y uno estricto), hay una íntima conexión entre los órdenes parciales reflexivos y los estrictos. Si R es un orden parcial reflexivo en A, definimos la relación S en A por:

(3.3) $$aSb \quad \text{sii} \quad aRb \text{ y } a \neq b$$

(de modo que $S = R - \mathrm{Id}_A$). S es un orden parcial estricto en A, el **orden parcial estricto asociado** a R.

Inversamente, si S es un orden parcial estricto en A, definimos la relación R en A por:

(3.4) $$aRb \quad \text{sii} \quad aSb \text{ o } a = b$$

(de modo que $R = S \cup \mathrm{Id}_A$). R es un orden parcial reflexivo en A, el **orden parcial reflexivo asociado** a S.

Vemos, pues, que si un orden parcial estricto corresponde a la idea de *preceder a*, el orden reflexivo asociado corresponde a *preceder o ser igual a*. En vez de «preceder», es habitual decir «ser menor que», de modo que los órdenes reflexivos corresponden a la idea de ser *menor o igual que*, mientras que los órdenes estrictos corresponden a la de ser *estrictamente menor que*. Así, (3.3) expresa que a es estrictamente menor que b si y sólo si a es menor o igual que b pero distinto de b, mientras que (3.4) expresa que a es menor o igual que b si y sólo si a es estrictamente menor que b o es igual a b.

Por esta razón, solemos usar el símbolo «$\leq$» y variantes para referirnos a órdenes parciales reflexivos y el símbolo «$<$» y variantes para referirnos a órdenes parciales estrictos. En un mismo contexto, $\leq$ y $<$ son órdenes asociados. Es decir, si en cierta discusión usamos el símbolo «$\leq$» (o «$\leq^A$», o «$\preceq$») para referirnos a un orden parcial reflexivo determinado, en esta misma discusión usaremos el símbolo «$<$» (o «$<^A$», o «$\prec$») para referirnos al orden estricto asociado a $\leq$ (o a $\leq^A$, o a $\preceq$, respectivamente). Si usamos los símbolos «$\leq$» y «$<$» en lugar de «R» y «S», las definiciones (3.3) y (3.4) se convierten en

$$a < b \quad \text{sii} \quad a \leq b \text{ y } a \neq b$$

y

$$a \leq b \quad \text{sii} \quad a < b \text{ o } a = b.$$

El uso de estos símbolos no presupone en absoluto que hablemos de números. Podemos usarlos en cualquier contexto en que esté presente un orden.

Supongamos que $\leq$ (respectivamente $<$) es un orden parcial reflexivo (respectivamente estricto) en un conjunto A y que a,b son elementos de A. Decimos que a y b son **comparables** si

$$a \leq b \quad \text{o} \quad b \leq a,$$

o, equivalentemente, si

$$a < b \quad \text{o} \quad b < a \quad \text{o} \quad b = a.$$

En otro caso decimos que a y b son elementos **incomparables**.

Un **orden total** o **lineal** en un conjunto A es un orden parcial (reflexivo o estricto) en A respecto al cual todos los elementos de A son comparables.

Es inmediato que dos elementos de A son comparables respecto a un orden parcial ($\leq$ o $<$) si y sólo si lo son respecto a su orden asociado ($<$ o $\leq$). Así, *un orden parcial (reflexivo o estricto) es lineal si y sólo si su orden asociado (estricto o reflexivo) lo es.*

Ejemplos

1. Las relaciones R y S del primer ejemplo de esta sección son órdenes parciales no lineales, ya que los elementos 2 y 3 de A no son comparables.
2. Las relaciones $\leq^{\mathbb{N}}$, $\leq^{\mathbb{Z}}$ y $\leq^{\mathbb{Q}}$ (y, por tanto, también $<^{\mathbb{N}}$, $<^{\mathbb{Z}}$ y $<^{\mathbb{Q}}$) son órdenes lineales.
3. La relación de inclusión $\subseteq_{\{1,2,3\}}$ (y, por tanto, también $\subset_{\{1,2,3\}}$) en el conjunto $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ no es un orden lineal, ya que, por ejemplo, $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$ no son comparables (ninguno está incluido en el otro).
4. La relación de divisibilidad D (y, por tanto, D') en el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los números enteros positivos no es un orden lineal, ya que, por ejemplo, los números 14 y 21 son incomparables, puesto que son distintos y ninguno de ellos es un divisor del otro.

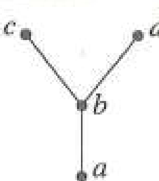
Elementos extremos de un orden parcial

Supongamos que $<$ es un orden parcial estricto en un conjunto A. Así, $\leq$ es su orden reflexivo asociado. Si a y b son elementos de A tales que $a < b$, diremos que a es *estrictamente menor que* b o que b *es estrictamente mayor que* a, mientras que si $a \leq b$, diremos que a es *menor o igual que* b o que b es *mayor o igual que* a. Sea $a \in A$. Decimos que

1. a es un **elemento minimal** si no hay ningún elemento de A estrictamente menor que a, es decir, si para todo $x \in A$, $x \not< a$,
2. a es un **elemento mínimo** si a es menor o igual que todo elemento de A, es decir, si para todo $x \in A$, $a \leq x$,
3. a es un elemento **maximal** si no hay ningún elemento de A estrictamente mayor que a, es decir, si para todo $x \in A$, $a \not< x$,
4. a es un elemento **máximo** si a es mayor o igual que todo elemento de A, es decir, si para todo $x \in A$, $x \leq a$.

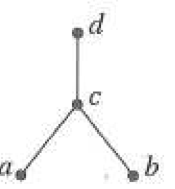
Ejemplos

1. En el orden parcial representado por el diagrama



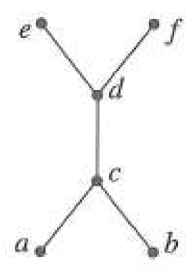
a es un elemento minimal y un elemento mínimo y c y d son elementos maximales. En este orden no hay ningún elemento máximo.

2. En el orden parcial representado por el diagrama



a y b son elementos minimales y d es un elemento maximal y máximo. En este orden no hay ningún elemento mínimo.

3. En el orden parcial representado por el diagrama



a y b son elementos minimales y e y f son elementos maximales. En este orden, no hay ningún elemento mínimo ni máximo.

4. En el orden $<^{\mathbb{N}}$ de los números naturales, 0 es un elemento mínimo y minimal. En este orden no hay ningún elemento máximo ni maximal.
5. En el orden $<^{\mathbb{Z}}$ de los números enteros no hay ningún elemento mínimo, ni máximo, ni minimal ni maximal.

Reunimos los hechos básicos acerca de estos cuatro conceptos en la proposición siguiente.

Proposición 3.7. *En todo orden parcial,*

(1) *hay a lo sumo un elemento mínimo,*

(2) *hay a lo sumo un elemento máximo,*

(3) *el elemento mínimo, si existe, es un elemento minimal,*

(4) *el elemento máximo, si existe, es un elemento maximal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $<$ un orden parcial estricto en un conjunto A. Así, $\leq$ es su orden reflexivo asociado.

Supongamos que a y b son elementos mínimos. Mostraremos que $a = b$. Puesto que a es mínimo, $a \leq b$; puesto que b también lo es, $b \leq a$. Así, por antisimetría de $\leq$, $a = b$. Esto justifica (1). Del mismo modo obtenemos (2).

Supongamos que el orden posee elemento mínimo, a. Si a no fuera minimal, habría $x \in A$ tal que $x < a$. Por ser a mínimo, $a \leq x$. Pero entonces, por transitividad de $<$, $x < x$, lo cual es imposible, ya que $<$ es irreflexivo. Así, a es minimal. Esto justifica (3). De modo análogo obtenemos (4). □

PROPOSICIÓN 3.8. *En un orden lineal, todo elemento minimal es mínimo y todo elemento maximal es máximo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $<$ es un orden lineal estricto en un conjunto A y que a es un elemento minimal. Por ser minimal, si x es un elemento cualquiera de A, $x \not< a$. Pero x y a son comparables. Así, $a < x$ o $a = x$, es decir, $a \leq x$, de modo que a es un elemento mínimo. Vemos, pues, que todo elemento minimal de un orden lineal es también mínimo. De modo análogo mostramos que todo elemento maximal es máximo. □

ÓRDENES LINEALES DISCRETOS Y DENSOS

A menudo, en lugar de decir que la relación R es un orden lineal en el conjunto A, diremos que **el par $\langle A, R\rangle$ es un orden lineal.**

Supongamos que $\langle A, \leq\rangle$ es un orden lineal reflexivo. Así, $\langle A, <\rangle$ es el orden lineal estricto asociado. Sean a y b elementos de A. Si $a < b$ y no hay ningún $x \in A$ tal que $a < x$ y $x < b$, decimos que a es **predecesor inmediato** de b y que b es **sucesor inmediato** de a. No es difícil ver que

1. a es predecesor inmediato de b sii para todo $x \in A$, si $a < x$, entonces $b \leq x$,
2. a es predecesor inmediato de b sii para todo $x \in A$, si $x < b$, entonces $x \leq a$.

Supongamos que b y b' son sucesores inmediatos de a. Así, $a < b$ y $a < b'$. Si $b \neq b'$, entonces, puesto que nos hallamos en un orden lineal, $b < b'$ o $b' < b$. La primera disyuntiva no es posible, ya que b' es un sucesor inmediato de a. Tampoco lo es la segunda, ya que b es un sucesor inmediato de a. Por tanto, $b = b'$. Esta argumentación muestra que ningún elemento de A puede tener dos sucesores inmediatos. De manera análoga podemos mostrar que ningún elemento de A tiene dos predecesores inmediatos. Por consiguiente:

1. Todo elemento de un orden lineal tiene a lo sumo un sucesor inmediato.
2. Todo elemento de un orden lineal tiene a lo sumo un predecesor inmediato.

Si b es sucesor inmediato de a, diremos, pues, que b es *el* sucesor inmediato de a y que a es *el* predecesor inmediato de b.

EJEMPLOS

1. En el orden $\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}\rangle$, 3 es el sucesor inmediato de 2 y 2 es el predecesor inmediato de 3. En este orden, todo número natural tiene sucesor inmediato y todo número natural positivo (es decir, distinto de 0) tiene predecesor inmediato. $n+1$ es el sucesor inmediato de n y n es el predecesor inmediato de $n+1$.
2. En el orden $\langle \mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}\rangle$, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, ningún elemento tiene predecesor inmediato ni sucesor inmediato.

Decimos que un orden lineal es **discreto** si (i) todo elemento excepto el mínimo (si existe) tiene predecesor inmediato y (ii) todo elemento excepto el máximo (si existe) tiene sucesor inmediato.

Obsérvese que un orden lineal (reflexivo o estricto) es discreto si y sólo si su orden asociado (estricto o reflexivo) también lo es.

EJEMPLOS

1. Si A es el conjunto de los números de dos cifras y $<^A$ es la relación de orden natural entre ellos, entonces $\langle A, <^A\rangle$ es un orden lineal estricto discreto con elemento mínimo, el número 10 y elemento máximo, el número 99.
2. El orden $\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}\rangle$ (o el orden $\langle \mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}}\rangle$) de los números naturales es discreto. Tiene elemento mínimo, el número cero. No tiene elemento máximo. El sucesor inmediato de un número n es el número $n+1$. El predecesor inmediato de un número n distinto de 0 es $n-1$.
3. El orden $\langle \mathbb{Z}^-, <^{\mathbb{Z}^-}\rangle$ (o el orden $\langle \mathbb{Z}^-, \leq^{\mathbb{Z}^-}\rangle$) de los números enteros negativos es discreto. No tiene elemento mínimo. Tiene elemento máximo, el número -1. El sucesor inmediato de un número n distinto de -1 es el número $n+1$. El predecesor inmediato de un número n es $n-1$.
4. El orden $\langle \mathbb{Z}, <^{\mathbb{Z}}\rangle$ (o el orden $\langle \mathbb{Z}, \leq^{\mathbb{Z}}\rangle$) de los números enteros (negativos, cero y positivos) es discreto. No tiene elemento mínimo ni máximo. El sucesor inmediato de un número n es $n+1$ y su predecesor inmediato es $n-1$.

Estos cuatro ejemplos ponen de manifiesto que hay órdenes discretos (1) con elemento mínimo y elemento máximo, (2) con elemento mínimo y sin elemento máximo, (3) con elemento máximo y sin elemento mínimo y (4) sin elemento máximo ni mínimo.

Decimos que un orden lineal es **denso** si tiene más de un elemento y ninguno de sus elementos tiene predecesor inmediato ni sucesor inmediato. Dicho de otro modo, un orden lineal $\langle A,<\rangle$ (o $\langle A,\leq\rangle$) es denso si y sólo si A tiene más de un elemento y entre dos elementos cualesquiera siempre hay un tercero, es decir, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in A$,

$$\text{si } a<b, \text{ hay } c \in A \text{ tal que } a<c \text{ y } c<b.$$

Observemos que un orden lineal (reflexivo o estricto) es denso si y sólo si su orden asociado (estricto o reflexivo) lo es.

Los cuatro ejemplos siguientes muestran que, como en el caso de los órdenes discretos, hay órdenes densos (1) sin elemento mínimo ni máximo, (2) con elemento mínimo y sin elemento máximo, (3) con elemento máximo y sin elemento mínimo y (4) con elementos máximo y mínimo.

EJEMPLOS

1. El orden $\langle \mathbb{Q},<^{\mathbb{Q}}\rangle$ (o el orden $\langle \mathbb{Q},\leq^{\mathbb{Q}}\rangle$) de los números racionales es denso, ya que si a y b son números racionales tales que $a<^{\mathbb{Q}} b$ y $c=(a+b)/2$, entonces $a<^{\mathbb{Q}} c$ y $c<^{\mathbb{Q}} b$. Este orden no tiene elemento mínimo ni elemento máximo, ya que, dado un número racional cualquiera a, $a-1$ es un número racional menor que a y $a+1$ es un número racional mayor que a.
2. El orden $\langle \mathbb{Q}',<^{\mathbb{Q}'}\rangle$ (o el orden $\langle \mathbb{Q}',\leq^{\mathbb{Q}'}\rangle$) de los números racionales no negativos (es decir, mayores o iguales que cero) es denso. Tiene elemento mínimo, el número cero, pero no tiene máximo.
3. El orden $\langle \mathbb{Q}'',<^{\mathbb{Q}''}\rangle$ (o el orden $\langle \mathbb{Q}'',\leq^{\mathbb{Q}''}\rangle$) de los números racionales no positivos (es decir, menores o iguales que cero) es denso. Tiene elemento máximo, el número cero, pero no tiene mínimo.
4. Sea A el conjunto de los números racionales mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 1:

$$A=\{x\in\mathbb{Q}: 0\leq^{\mathbb{Q}} x\leq^{\mathbb{Q}} 1\}$$

y sea $\leq^{A}$ el orden natural entre estos números racionales. El orden $\langle A,\leq^{A}\rangle$ (o el orden $\langle A,<^{A}\rangle$) es denso. Tiene elemento mínimo, el número cero, y elemento máximo, el número 1.

CONSTRUCCIÓN DE ALGUNOS ÓRDENES LINEALES

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tiene su *orden natural*, $<^{\mathbb{N}}$ (o, en versión reflexiva, $\leq^{\mathbb{N}}$), el orden que nos sirve para contar: $0,1,2,3,\ldots$ Pero es posible ordenar $\mathbb{N}$ de muy distintas maneras, como se pone de manifiesto en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1

Definamos la relación $<_1$ en el conjunto $\mathbb{N}$ así:

$$n<_1 m \quad \text{sii} \quad (1)\ n \text{ y } m \text{ son positivos y } n<^{\mathbb{N}} m \quad \text{o}$$
$$(2)\ n \text{ es positivo y } m=0.$$

Esta relación es un orden lineal estricto en el conjunto $\mathbb{N}$ que podemos describir informalmente así: en primer lugar aparecen todos los enteros positivos en su orden natural. A continuación aparece el número cero:

$$1<_1 2<_1 3<_1 4<_1 5<_1 6<_1 7<_1 \cdots <_1 0.$$

Algunas propiedades del orden $\langle \mathbb{N},<_1\rangle$ (y de su asociado $\langle \mathbb{N},\leq_1\rangle$ son:

1. Tiene elemento mínimo, el número 1, y elemento máximo, el número 0.
2. Todo elemento excepto el máximo tiene sucesor inmediato: si $n\neq 0$, el sucesor inmediato de n en el orden $<_1$ es $n+1$.
3. Todo elemento, a excepción de 1 y 0, tiene predecesor inmediato: si n es distinto de 0 y de 1, el predecesor inmediato de n en el orden $<_1$ es $n-1$.

Así, $\langle \mathbb{N},<_1\rangle$ no es discreto, ya que 0 no es mínimo y carece de predecesor inmediato. Claramente, tampoco es denso.

EJEMPLO 2

Definamos la relación $<_2$ en el conjunto $\mathbb{N}$ así:

$$n<_2 m \quad \text{sii} \quad (1)\ n \text{ es par y } m \text{ es impar} \quad \text{o}$$
$$(2)\ n \text{ y } m \text{ son pares y } n<^{\mathbb{N}} m \quad \text{o}$$
$$(3)\ n \text{ y } m \text{ son impares y } n<^{\mathbb{N}} m.$$

Esta relación es un orden lineal estricto en el conjunto $\mathbb{N}$ que podemos describir informalmente así: en primer lugar aparecen los números pares en su orden natural. Tras ellos, aparecen los números impares en su orden natural.

$$0<_2 2<_2 4<_2 6<_2 8<_2\cdots 1<_2 3<_2 5<_2 7<_2 9<_2\cdots$$

He aquí algunas propiedades del orden $\langle \mathbb{N},<_2\rangle$:

1. Tiene elemento mínimo, el número 0, pero no tiene elemento máximo.
2. Todo elemento tiene sucesor inmediato. El sucesor inmediato de n en este orden es $n+2$.
3. Todo elemento a excepción de los números 0 y 1 tiene predecesor inmediato. Si $n \neq 0$ y $n \neq 1$, el predecesor inmediato de n en este orden es $n-2$.

Así, $\langle \mathbb{N}, <_2 \rangle$ no es discreto, ya que 1 no es mínimo y carece de predecesor inmediato. Claramente, tampoco es denso.

EJEMPLO 3

El orden $\langle \mathbb{N}, <_2 \rangle$ «tiene la forma» de dos copias sucesivas del orden natural. La primera copia se construye con los números pares y la segunda con los impares. No es difícil definir un orden en $\mathbb{N}$ que «tenga la forma» de tres copias consecutivas del orden natural. Basta dividir $\mathbb{N}$ en tres conjuntos infinitos y copiar el orden natural en cada uno de estos conjuntos. Podemos hacerlo, por ejemplo, así:

$$0,3,6,9,12,\cdots \quad 1,4,7,10,13,\cdots \quad 2,5,8,11,14,\cdots$$

Vemos que los elementos del primer conjunto son los múltiplos de 3 (es decir, los números que dan resto 0 al dividirlos por 3), los del segundo son los números que dan resto 1 al dividirlos por 3 y los del tercero son los que dan resto 2 al dividirlos por 3.

Definamos con precisión este orden, al que podemos referirnos como «$<_3$»:

$n <_3 m$ sii (1) n da menor resto que m en la división por 3 o

(2) n y m dan el mismo resto y $n <^{\mathbb{N}} m$.

El orden $\langle \mathbb{N}, <_3 \rangle$ tiene las siguientes propiedades:

1. Tiene elemento mínimo, el número 0, pero no tiene elemento máximo.
2. Todo elemento tiene sucesor inmediato. El sucesor inmediato de n en este orden es $n+3$.
3. Todo número, a excepción de 0, 1 y 2 tiene predecesor inmediato. Si n es distinto de 0, 1 y 2, el predecesor inmediato de n en $<_3$ es $n-3$.

Así, $\langle \mathbb{N}, <_3 \rangle$ no es discreto ni denso.

Este ejemplo es fácilmente generalizable. Si queremos definir un orden lineal en $\mathbb{N}$ que «tenga la forma» de, digamos, 75 copias consecutivas del orden natural, dividiremos $\mathbb{N}$ en 75 partes según el resto en la división por 75. El orden $<'$ así obtenido tendrá la siguiente definición, análoga a la de $<_3$:

$n <' m$ sii (1) n da menor resto que m en la división por 75 o

(2) n y m dan el mismo resto y $n <^{\mathbb{N}} m$.

Este orden tampoco es discreto, ya que si bien todo número tiene sucesor inmediato (el sucesor inmediato de n en $\langle \mathbb{N}, <' \rangle$ es $n+75$), los números $1,2,3,4,\ldots,73,74$ son distintos del elemento mínimo (0) y carecen de predecesor inmediato. Tampoco es denso.

EJEMPLO 4

Podemos definir también órdenes discretos en $\mathbb{N}$ distintos del natural. Éste, por ejemplo (compárese con $<_2$):

$n <_4 m$ sii (1) n es par y m es impar o

(2) n y m son pares y $n <^{\mathbb{N}} m$ o

(3) n y m son impares y $m <^{\mathbb{N}} n$.

La relación $<_4$ es un orden lineal estricto en el conjunto $\mathbb{N}$ que describimos informalmente así: en primer lugar aparecen los números pares en su orden natural. Tras ellos, aparecen los números impares en orden inverso al natural.

$$0 <_4 2 <_4 4 <_4 6 <_4 8 <_4 \cdots \quad \cdots <_4 9 <_4 7 <_4 5 <_4 3 <_4 1.$$

El orden $\langle \mathbb{N}, <_4 \rangle$ tiene las siguientes propiedades.

1. Tiene elemento mínimo, el número 0, y elemento máximo, el número 1.
2. Todo elemento excepto el máximo tiene sucesor inmediato: si n es par, su sucesor inmediato es $n+2$; si n es impar y distinto de 1, su sucesor inmediato es $n-2$.
3. Todo elemento excepto el mínimo tiene predecesor inmediato: si n es par y distinto de 0, su predecesor inmediato es $n-2$; si n es impar, su predecesor inmediato es $n+2$.

Así, $\langle \mathbb{N}, <_4 \rangle$ es un orden discreto.

EJEMPLO 5

Podemos ordenar el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales «en la forma» natural de los números enteros:

$n <_5 m$ sii (1) n es par y m es impar o

(2) n y m son pares y $m <^{\mathbb{N}} n$ o

(3) n y m son impares y $n <^{\mathbb{N}} m$.

La relación $<_5$ es un orden lineal estricto en el conjunto $\mathbb{N}$ que podemos describir informalmente así: en primer lugar aparecen los números pares en orden inverso al natural. Tras ellos, aparecen los números impares en su orden natural.

$$\cdots <_5 6 <_5 4 <_5 2 <_5 0 <_5 1 <_5 3 <_5 5 <_5 7 <_5 \cdots$$

El orden $\langle \mathbb{N}, <_5 \rangle$ es discreto. En este orden, el sucesor inmediato de un número par n distinto de cero es $n-2$, el de 0 es 1 y el de un número impar n es $n+2$. El predecesor inmediato de un número impar n distinto de 1 es $n-2$, el de 1 es 0 y el de un número par n es $n+2$. Claramente, este orden carece de elemento mínimo y de elemento máximo.

Ejemplo 6

Si hemos ordenado el conjunto $\mathbb{N}$ «en la forma» natural de los números enteros, también podemos ordenar $\mathbb{Z}$ «en la forma» natural de los números naturales. Lo hacemos con el orden $<_6$:

$$0 <_6 1 <_6 -1 <_6 2 <_6 -2 <_6 3 <_6 -3 <_6 4 <_6 -4 <_6 5 <_6 -5 \cdots$$

Para definir este orden con precisión recordamos que el *valor absoluto*, $|n|$, de un número n es n mismo, si n no es negativo, y es $-n$, si n es negativo. Así, $|0| = 0$, $|1| = |-1| = 1$, $|2| = |-2| = 2$, etc. La definición del orden $<_6$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ reza así: si $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}$,

$$n <_6 m \quad \text{sii} \quad (1)\ |n| <^{\mathbb{N}} |m| \ \text{o}$$
$$(2)\ |n| = |m| \text{ y } n \text{ es positivo y } m \text{ es negativo.}$$

A partir de esta definición podemos verificar que $\langle \mathbb{Z}, <_6 \rangle$ es un orden lineal discreto con elemento mínimo y sin elemento máximo.

7. Relaciones entre varios objetos

Las relaciones que hemos considerado hasta ahora se dan entre pares de objetos. Pero es conveniente generalizar el concepto de relación de modo que sea posible hablar de relaciones que se dan entre más de dos objetos. Relaciones de este tipo no son difíciles de hallar. Así, podemos considerar la relación que se da entre tres puntos a, b, c de una línea recta, cuando el primero está situado entre el segundo y el tercero. Puesto que se da entre tres objetos, diremos que se trata de una *relación ternaria*. Otro ejemplo de relación ternaria es la que se da entre tres números naturales cuando el último es la suma de los dos primeros, o la que se da entre tres seres humanos a, b, c cuando a es hijo de b y c. Hay también *relaciones cuaternarias*, que de dan entre cuatro objetos, como la relación que se da entre los números enteros positivos m, n, k, l cuando $m \cdot l = n \cdot k$, es decir cuando $m/n = k/l$, o la que se da entre cuatro puntos

de un plano cuando son los vértices de un mismo cuadrado. No hay razón para detenernos aquí. Podemos considerar también relaciones que se dan entre cualquier número determinado de elementos. Para dar cuenta de estos tipos más generales de relación de modo análogo a como hicimos con las *relaciones binarias*, es decir, para tratarlas como conjuntos, necesitamos introducir los conceptos de *triplo ordenado*, de *cuádruplo ordenado*, etc.

Definimos, en primer lugar,

$$\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$$

y decimos que $\langle a, b, c \rangle$ es el **triplo ordenado** de a, b y c. Con ayuda del concepto de triplo ordenado, definimos

$$\langle a, b, c, d \rangle = \langle \langle a, b, c \rangle, d \rangle,$$

y decimos que $\langle a, b, c, d \rangle$ es el **cuádruplo ordenado** de a, b, c y d. Más generalmente, si n es un número natural cualquiera y ya hemos definido el **n–tuplo ordenado** $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de los objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, podemos definir el $(n+1)$–tuplo ordenado de $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ así:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \rangle = \langle \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle, a_{n+1} \rangle.$$

Lo importante de estos conceptos es que cumplen la condición análoga a (3.1), que exigimos al par ordenado:

$$\text{si } \langle a, b, c \rangle = \langle a', b', c' \rangle, \text{ entonces } a = a',\ b = b' \text{ y } c = c',$$
$$\text{si } \langle a, b, c, d \rangle = \langle a', b', c', d' \rangle, \text{ entonces } a = a',\ b = b',\ c = c' \text{ y } d = d'$$

y, en general, para n–tuplos,

$$\text{si } \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle a'_1, \ldots, a'_n \rangle, \text{ entonces } a_1 = a'_1, \ldots \text{ y } a_n = a'_n.$$

Verificamos que esta condición se cumple para el caso de los triplos ordenados. Supongamos que $\langle a, b, c \rangle = \langle a', b', c' \rangle$, es decir, por la definición de triplo ordenado, que $\langle \langle a, b \rangle, c \rangle = \langle \langle a', b' \rangle, c' \rangle$. Por la propiedad básica de los pares ordenados (3.1), tenemos que

$$\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle \quad \text{y} \quad c' = c'.$$

Por la misma propiedad de los pares ordenados, nuevamente,

$$a = a' \text{ y } b = b' \text{ y } c = c',$$

como debíamos mostrar.

El caso de los cuádruplos ordenados se reduce al de los triplos y, en general, el caso de los $(n+1)$–tuplos se reduce al de los n–tuplos.

Definimos ahora la generalización a varios factores del producto cartesiano.

$$A^2 = A \times A,$$
$$A^3 = A^2 \times A,$$
$$A^4 = A^3 \times A.$$

En general, si ya hemos definido A^n,

$$A^{n+1} = A^n \times A.$$

Así, para cada número natural $n \geq 2$,

$$A^n = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle : a_1 \in A, a_2 \in A, \ldots, a_n \in A\},$$

es decir, A^n es el conjunto de los n–tuplos ordenados de elementos de A.

Podemos ya definir con precisión el concepto general de relación. Si A es un conjunto cualquiera, una **relación binaria en** A es un subconjunto de A^2, es decir, es un conjunto de pares de elementos de A; una **relación ternaria en** A es un subconjunto de A^3, es decir, es un conjunto de triplos de elementos de A. En general, para todo número $n \geq 2$, una **relación n–aria en** A es un subconjunto de A^n, es decir, es un conjunto de n–tuplos de elementos de A.

Ejemplos

1. El conjunto
$$R = \{\langle n, m, k\rangle : n \cdot m = k\}$$
es una relación ternaria en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.
2. El conjunto
$$S = \{\langle m, n, k, l\rangle : n \cdot l = n \cdot k\}$$
es una relación cuaternaria en $\mathbb{N}$.

8. Ejercicios

1. Complete:

   (a) $\langle 1,1\rangle = \cdots$

   (b) $\langle \emptyset,1\rangle = \cdots$

   (c) $\langle 1,\emptyset\rangle = \cdots$

   (d) $\langle \emptyset,\emptyset\rangle = \cdots$

2. Sea $[a,b] = \{\{a,1\},\{b,2\}\}$. Muestre que si $[a,b] = [c,d]$, entonces $a = c$ y $b = d$.

3. Sea $\ll a,b \gg = \{\{a\},\{b,\emptyset\}\}$. Muestre que si $\ll a,b \gg = \ll c,d \gg$, entonces $a = c$ y $b = d$.

4. Verifique les igualdades siguientes

   (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

   (b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

   (c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

   (d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

   (e) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

   (f) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

   (g) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D) = (A \times D) \cap (B \times C)$.

   (h) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$.

5. Si U es el universo del discurso que hemos elegido para cierta aplicación, el universo del discurso apropiado para tratar los pares ordenados de elementos de U es, naturalmente, $U \times U$. Así, si $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, el complemento del producto cartesiano $A \times B$ lo es con respecto a $U \times U$, es decir:
$$\overline{A \times B} = (U \times U) - (A \times B).$$
(Naturalmente, los complementos de los subconjuntos de U lo son con respecto a U, de manera que $\overline{A} = U - A$ y $\overline{B} = U - B$). Muestre que

   (a) $\overline{A \times B} = (\overline{A} \times U) \cup (U \times \overline{B})$,

   (b) $\overline{A \times B} = (A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B) \cup (\overline{A} \times \overline{B})$,

   (c) $U \times U = (A \times B) \cup (A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B) \cup (\overline{A} \times \overline{B})$.

6. Halle todas las relaciones en el conjunto $\{1\}$.

7. Defina seis relaciones distintas en el conjunto $\{1,2\}$.

8. ¿Cuántas relaciones distintas hay en un conjunto de un elemento? ¿y en un conjunto de dos elementos? ¿y en uno de tres elementos? En general, si n es un número entero positivo, ¿cuántas relaciones hay en un conjunto de n elementos?

9. Averigüe si las siguientes igualdades se cumplen para cualesquiera relaciones R, S.

   (a) $\mathrm{dom}(R \cap S) = \mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S)$,

   (b) $\mathrm{dom}(R \cup S) = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{dom}(S)$,

   (c) $\mathrm{dom}(R - S) = \mathrm{dom}(R) - \mathrm{dom}(S)$.

10. Sean $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ y $S = \{\langle 2,2\rangle, \langle 3,2\rangle\}$. Calcule los productos relacionales $R|S$, $R|\widetilde{S}$, $S|R$ y $S|\widetilde{R}$.

11. Sea $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$. Calcule los productos relacionales $R|R$, $R|\widetilde{R}$, $\widetilde{R}|R$ y $\widetilde{R}|\widetilde{R}$.

12. Sea $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$. Calcule los productos relacionales $R|R$, $R|\widetilde{R}$, $\widetilde{R}|R$ y $\widetilde{R}|\widetilde{R}$.

13. Halle una relación R en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ tal que $R|\widetilde{R}$ sea la relación total en A y $\widetilde{R}|R$ conste de un solo par.

14. Sea R la relación en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales definida por

$$nRm \text{ sii } n \neq m.$$

Describa las relaciones $R|R$, $R|\widetilde{R}$, $\widetilde{R}|R$ y $\widetilde{R}|\widetilde{R}$.

15. Halle una relación R tal que $R|R \neq \emptyset$ pero $R|R|R = \emptyset$.

16. Halle dos relaciones distintas R y S tales que $R|S = S|R$.

17. Supongamos que R y S son relaciones tales que

$$\widetilde{R}|\widetilde{S} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,2\rangle\}.$$

¿Qué relación es $S|R$? ¿Por qué?

18. Muestre que para cualesquiera relaciones R, S y T,

$$R|(S \cup T) = (R|S) \cup (R|T).$$

19. Muestre que para cualesquiera relaciones R, S y T,

$$R|(S \cap T) \subseteq (R|S) \cap (R|T)$$

y dé un ejemplo de que la igualdad puede no cumplirse, es decir, exhiba relaciones R, S y T tales que

$$R|(S \cap T) \neq (R|S) \cap (R|T).$$

20. Discuta las propiedades de las relaciones siguientes. Es decir, determine de cada una de ellas si es reflexiva en su campo, irreflexiva, simétrica, etc.

(a) $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,1\rangle\}$.

(b) $S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$.

(c) $T = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle\}$.

(d) La relación de identidad en un conjunto no vacío A.

(e) La relación vacía en un conjunto no vacío A.

(f) La relación total en un conjunto no vacío A.

(g) La relación $R = \{\langle n,m\rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } m \in \mathbb{N} \text{ y } n \neq m\}$.

(h) La relación $R = \{\langle n,m\rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } m \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq m\}$.

(i) La relación $R = \{\langle n,m\rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } m \in \mathbb{N} \text{ y } n < m\}$.

(j) La relación $R = \{\langle n,m\rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } m \in \mathbb{N} \text{ y } n = m^2\}$.

(k) La relación *tener el mismo número de letras* en el conjunto de las palabras castellanas.

(l) La relación *ser padre de* en un conjunto dado de seres humanos.

(m) La relación *ser antepasado de* en un conjunto dado de seres humanos.

(n) La relación *estar casado con* en una sociedad monógama.

21. ¿Hay relaciones que sean a la vez simétricas y antisimétricas? Si las hay, ¿cómo son?

22. Halle un conjunto A y una relación R en A que sea reflexiva en A y simétrica, pero no transitiva.

23. Muestre que si A es un conjunto de menos de tres elementos, entonces toda relación en A que sea reflexiva en A y simétrica es también transitiva. Compare este ejercicio con el anterior.

24. Halle un conjunto A y una relación R en A que sea simétrica y transitiva, pero no reflexiva en A.

25. Muestre que si una relación R es simétrica y transitiva y si $A = \text{dom}(R)$, entonces R es reflexiva en A. Compare este ejercicio con el anterior.

26. Supongamos que R y S son relaciones simétricas. ¿Lo serán también $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$ y $R|S$? Justifique las respuestas.

27. Supongamos que R y S son relaciones asimétricas. ¿Lo serán también $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$ y $R|S$? Justifique las respuestas.

28. Supongamos que R y S son relaciones transitivas. ¿Lo serán también $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$ y $R|S$? Justifique las respuestas.

29. Describa la relación de equivalencia en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ determinada por la partición $\Pi = \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{5\}\}$.

30. Consideremos la relación R en el conjunto A de las palabras castellanas definida así: pRq sii las palabras p y q tienen alguna letra en común. ¿Es R una relación de equivalencia en A? En caso negativo, ¿por qué no? En caso afirmativo, ¿cuántas clases de equivalencia hay?

31. Sea R una relación de equivalencia en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ tal que $[1]_R = \{1,6\}$, $[2]_R = \{2,5\}$ y $[3]_R = \{3,4\}$. Complete: $[4]_R = \cdots$, $[5]_R = \cdots$, $[6]_R = \cdots$, $R = \cdots$, $A/R = \cdots$

32. Sea R una relación de equivalencia en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ tal que $[1]_R = \{1,6,7\}$, $[2]_R = \{2\}$ y $[3]_R = \{3,4\}$. Complete: $[4]_R = \cdots$, $[5]_R = \cdots$, $[6]_R = \cdots$, $[7]_R = \cdots$, $R = \cdots$, $A/R = \cdots$

33. Supongamos que A es un conjunto de siete elementos y que R y S son relaciones de equivalencia en A tales que R tiene siete clases de equivalencia y S una. ¿Qué relaciones son R y S?

34. Muestre que si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces $R|R = R$.

35. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. ¿Es también $\breve{R}$ una relación de equivalencia en A? ¿Por qué?

36. Muestre que si R y S son relaciones de equivalencia en un conjunto A, también lo es su intersección $R \cap S$.

37. Sea C una colección no vacía de relaciones de equivalencia en un conjunto A. Muestre que $\bigcap C$ es también una relación de equivalencia en A. (Este ejercicio es una generalización del anterior.)

38. Halle un conjunto A y dos relaciones R y S de equivalencia en A cuya unión $R \cup S$ no sea una relación de equivalencia en A. Compare este ejercicio con el ejercicio 36.

39. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. ¿Es también $R|R$ una relación de equivalencia en A?

40. Defina una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbb{N}$ que tenga exactamente 43 clases de equivalencia.

41. Defina una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbb{N}$ que tenga infinitas clases de equivalencia.

42. Muestre que una relación R en un conjunto A es una relación de equivalencia en A si y sólo si

    (a) $\mathrm{dom}(R) = A$ y

    (b) para cualesquiera $x, y, z \in A$, si xRz y yRz, entonces xRy.

43. Sea A el conjunto de los seres humanos nacidos entre 1900 y 1999 y sea R la relación en A tal que si $a, b \in A$, aRb sii el año del nacimiento de a es el mismo o es anterior al año del nacimiento de b. ¿Es R un orden parcial reflexivo en A? En caso negativo, ¿por qué no? En caso afirmativo, ¿es un orden lineal? ¿por qué?

44. Sea A el conjunto de los seres humanos nacidos entre 1900 y 1999 y sea S la relación en A tal que si $a, b \in A$, aSb sii el año del nacimiento de a es anterior al año del nacimiento de b. ¿Es S un orden parcial estricto en A? En caso negativo, ¿por qué no? En caso afirmativo, ¿es un orden lineal? ¿por qué?

45. Sea A el conjunto $\{1, 2, 3, ..., 1000\}$ de los mil primeros enteros positivos y sea S la relación en A tal que si $n, m \in A$, nSm sii la última cifra de n es estrictamente menor que la última cifra de m. ¿Es S un orden parcial estricto en A? En caso negativo, ¿por qué no? En caso afirmativo, ¿es un orden lineal? ¿por qué?

46. Sea A el conjunto $\{1, 2, 3, ..., 1000\}$ de los mil primeros enteros positivos y sea R la relación en A tal que si $n, m \in A$, nRm sii la última cifra de n es menor o igual que la última cifra de m. ¿Es R un orden parcial reflexivo en A? En caso negativo, ¿por qué no? En caso afirmativo, ¿es un orden lineal? ¿por qué?

47. Describa todos los órdenes lineales estrictos en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

48. Muestre que una relación R en un conjunto A es un orden parcial reflexivo en A si y sólo si

    (a) $R|R = R$ y

    (b) $R \cap \breve{R} = Id_A$.

49. Muestre que si R es un orden parcial reflexivo en un conjunto A, entonces la relación S en A definida por

$$aSb \quad \text{sii} \quad aRb \text{ y } a \neq b$$

es un orden parcial estricto en A.

50. Muestre que si S es un orden parcial estricto en un conjunto A, entonces la relación R en A definida por

$$aRb \quad \text{sii} \quad aSb \text{ o } a = b$$

es un orden parcial reflexivo en A.

51. Si un orden parcial tiene elemento máximo, este elemento máximo es el único elemento maximal de A. Muestre, sin embargo, que es posible que un orden parcial tenga un único elemento maximal pero no tenga elemento máximo. Con mayor precisión, defina un orden parcial con un único elemento maximal y sin elemento máximo.

52. Considere el orden parcial reflexivo de divisibilidad en el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los números enteros positivos definido por

$$nDm \quad \text{sii} \quad \text{hay } k \geq 1 \text{ tal que } n \cdot k = m.$$

¿Tiene este orden elemento mínimo? ¿Tiene elemento máximo? ¿Tiene elementos minimales? ¿Tiene elementos maximales? En caso afirmativo, diga quiénes son. En caso negativo, justifique su respuesta.

53. Supongamos que A y B son conjuntos disjuntos y sean $\langle A, <^A \rangle$ y $\langle B, <^B \rangle$ órdenes lineales estrictos. Consideremos el conjunto $E = A \cup B$ y definamos la relación $<^E$ en E así:

$$x <^E y \quad \text{sii} \quad \begin{array}{ll} (1)\ x \in A \text{ y } y \in B & \text{o} \\ (2)\ x \in A,\ y \in A \text{ y } x <^A y & \text{o} \\ (3)\ x \in B,\ y \in B \text{ y } x <^B y. & \end{array}$$

Muestre que $<^E$ es un orden lineal estricto en E. El orden $\langle E, <^E \rangle$ es la **suma** de los órdenes $\langle A, <^A \rangle$ y $\langle B, <^B \rangle$. Observe que en este orden aparecen primero los elementos de A ordenados según $<^A$ y a continuación vienen los elementos de B ordenados según $<^B$.

54. Sean A y B conjuntos disjuntos. Supongamos que $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$ son órdenes lineales discretos, $E=A\cup B$ y $\langle E,<^E\rangle$ es la suma de $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$ (véase ejercicio 53). ¿En cuáles de los siguientes casos podemos concluir que $\langle E,<^E\rangle$ un orden discreto?

(a) $\langle A,<^A\rangle$ tiene elemento máximo y $\langle B,<^B\rangle$ tiene elemento mínimo,

(b) $\langle A,<^A\rangle$ tiene elemento máximo y $\langle B,<^B\rangle$ no tiene elemento mínimo,

(c) $\langle A,<^A\rangle$ no tiene elemento máximo y $\langle B,<^B\rangle$ tiene elemento mínimo,

(d) $\langle A,<^A\rangle$ no tiene elemento máximo y $\langle B,<^B\rangle$ no tiene elemento mínimo.

En los casos en que $\langle E,<^E\rangle$ no es discreto, diga qué elementos carecen de predecesor inmediato o de sucesor inmediato.

55. Sean A y B conjuntos disjuntos. Supongamos que $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$ son órdenes lineales densos, $E=A\cup B$ y $\langle E,<^E\rangle$ es la suma de $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$ (véase ejercicio 53). ¿En cuáles de los siguientes casos podemos concluir que $\langle E,<^E\rangle$ un orden denso?

(a) $\langle A,<^A\rangle$ tiene elemento máximo y $\langle B,<^B\rangle$ tiene elemento mínimo,

(b) $\langle A,<^A\rangle$ tiene elemento máximo y $\langle B,<^B\rangle$ no tiene elemento mínimo,

(c) $\langle A,<^A\rangle$ no tiene elemento máximo y $\langle B,<^B\rangle$ tiene elemento mínimo,

(d) $\langle A,<^A\rangle$ no tiene elemento máximo y $\langle B,<^B\rangle$ no tiene elemento mínimo.

En los casos en que $\langle E,<^E\rangle$ no es denso, diga qué elementos poseen predecesor inmediato o sucesor inmediato.

56. La relación R definida a continuación es un orden lineal estricto en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales:

$$\begin{array}{lll} nRm & \text{sii} & (1)\ (n\leq^{\mathbb{N}} 3 \text{ y } 3<^{\mathbb{N}} m) \quad \text{o} \\ & & (2)\ (n\leq^{\mathbb{N}} 3,\ m\leq^{\mathbb{N}} 3 \text{ y } m<^{\mathbb{N}} n) \quad \text{o} \\ & & (3)\ (3<^{\mathbb{N}} n,\ 3<^{\mathbb{N}} m \text{ y } m<^{\mathbb{N}} n). \end{array}$$

¿Tiene este orden orden elemento mínimo? ¿Tiene elemento máximo? ¿Qué elementos tienen sucesor inmediato? ¿Qué elementos tienen predecesor inmediato? ¿Es un orden discreto? ¿Es denso?

57. La relación S definida a continuación es un orden lineal estricto en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales:

$$\begin{array}{lll} nSm & \text{sii} & (1)\ (3<^{\mathbb{N}} n \text{ y } m\leq^{\mathbb{N}} 3) \quad \text{o} \\ & & (2)\ (3<^{\mathbb{N}} n,\ 3<^{\mathbb{N}} m \text{ y } n<^{\mathbb{N}} m) \quad \text{o} \\ & & (3)\ (n\leq^{\mathbb{N}} 3,\ m\leq^{\mathbb{N}} 3 \text{ y } m<^{\mathbb{N}} n). \end{array}$$

¿Tiene este orden orden elemento mínimo? ¿Tiene elemento máximo? ¿Qué elementos tienen sucesor inmediato? ¿Qué elementos tienen predecesor inmediato? ¿Es un orden discreto?

58. Si n es un número natural, sea $z(n)$ el número de ceros que aparecen entre las cifras de n. Así, $z(0)=1$, $z(17)=0$, $z(104)=1$, $z(5023040)=3$, etc. Definamos la relación $<^*$ en $\mathbb{N}$ así:

$$n<^* m \text{ sii } z(n)<^{\mathbb{N}} z(m) \text{ o } (z(n)=z(m) \text{ y } n<^{\mathbb{N}} m).$$

¿Tiene este orden orden elemento mínimo? ¿Tiene elemento máximo? ¿Qué elementos tienen sucesor inmediato? ¿Qué elementos tienen predecesor inmediato? ¿Es un orden discreto?

Observe que el orden $\langle\mathbb{N},<^*\rangle$ «tiene la forma» de infinitas copias consecutivas del orden natural en $\mathbb{N}$.

59. La relación $\prec$ definida a continuación es un orden lineal estricto en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los nombres enteros (positivos, negativos y cero).

$$\begin{array}{lll} n\prec m & \text{sii} & (1)\ (n \text{ es positivo y } m\leq^{\mathbb{Z}} 0) \quad \text{o} \\ & & (2)\ (n \text{ y } m \text{ son positivos y } n<^{\mathbb{Z}} m) \quad \text{o} \\ & & (3)\ (n=0 \text{ y } m \text{ es negativo}) \quad \text{o} \\ & & (4)\ (n \text{ y } m \text{ son negativos y } n<^{\mathbb{Z}} m). \end{array}$$

¿Tiene este orden orden elemento mínimo? ¿Tiene elemento máximo? ¿Qué elementos tienen sucesor inmediato? ¿Qué elementos tienen predecesor inmediato? Muestre que 0 no tiene predecesor inmediato ni sucesor inmediato.

60. Supongamos que $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$ son órdenes lineales. Definamos la relación $<$ en el producto cartesiano $A\times B$ así:

$$\langle a,b\rangle<\langle c,d\rangle \text{ sii } b<^B d \text{ o } (b=d \text{ y } a<^A c).$$

Muestre que $<$ es un orden lineal estricto en $A\times B$.

El orden $\langle A\times B,<\rangle$ es el **producto** de los órdenes $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES

1. El concepto de función

Constantemente nos encontramos con funciones. Nos hallamos ante una función cuando asignamos valores a objetos (por ejemplo, cuando asignamos a un libro su número de páginas o a una persona el día de su nacimiento), cuando expresamos la variación de una magnitud en términos de otra (por ejemplo, la posición de un móvil en términos del tiempo transcurrido desde su partida o el área de un círculo en términos de su radio), cuando determinamos personas o cosas en términos de otras (como cuando hablamos de *el padre de* una persona, *el alcalde de* una ciudad, *el autor de* un libro o *la capital de* un país), cuando damos reglas para transformar una cosa en otra (por ejemplo, para formar el plural de una palabra o para simplificar una fracción). Todos estos casos y otros muchos tienen algo en común. En todos ellos se relacionan unas cosas con otras (libros con números, personas con días, posiciones con tiempos, números con números, personas con personas, ciudades con personas, libros con personas, países con ciudades, palabras con palabras, fracciones con fracciones), pero la relación en cuestión tiene la peculiaridad de que ningún objeto se relaciona con más de un objeto a la vez: el número de páginas de un libro es único, como lo es el área de un círculo de radio dado, el plural de una palabra dada, etc. Una relación de esta clase es una función. Explícitamente, una **función** es una relación R tal que para cualesquiera objetos a,b,c,

$$\text{si } \langle a,b\rangle \in R \text{ y } \langle a,c\rangle \in R, \text{ entonces } b=c;$$

en otras palabras, una relación R es una función si y sólo si para todo $a \in \text{dom}(R)$ hay un único objeto b tal que $\langle a,b\rangle \in R$.

EJEMPLOS

1. La relación $\{\langle n,m\rangle : n,m$ son enteros positivos y $m=n+1\}$ es una función.
2. La relación $\{\langle x,\{x\}\rangle : x \in A\}$, donde A es un conjunto dado, es una función.

3. Si $A \neq \emptyset$, la relación $\{\langle x,y\rangle : x \subseteq A,\ y \subseteq A$ y $x \subseteq y\}$ no es una función, ya que $\emptyset \subseteq \emptyset$ y $\emptyset \subseteq A$.
4. La relación $\{\langle n,m\rangle : n,m$ son números enteros y $m=n/2\}$ es una función.
5. La relación $\{\langle n,m\rangle : n,m$ son números enteros y $n^2=m\}$ es una función.
6. La relación $\{\langle n,m\rangle : n,m$ son números enteros y $n=m^2\}$ no es una función, ya que $25=5^2$ y $25=(-5)^2$, pero $5 \neq -5$.

Solemos referirnos a funciones mediante las letras «f», «g», «h», «F», «G» y «H», posiblemente con subíndices. Es decir, usamos estas letras como *variables de funciones*.

Si f es una función y $a \in \text{dom}(f)$, $f(a)$ es el único objeto b tal que $\langle a,b\rangle \in f$. Así, para todo elemento a del dominio de f,

$$f(a)=b \text{ sii } \langle a,b\rangle \in f.$$

Decimos que $f(a)$ es **el valor de f en el argumento a**, o **el valor que f asigna al argumento a**. En este contexto, «argumento» es sinónimo de «elemento del dominio».

Así, si F es la función del ejemplo 1, todo entero positivo pertenece a su dominio y F asigna a cada entero positivo n su sucesor inmediato $n+1$, de manera que $F(1)=2$, $F(2)=3$ y, en general, $F(n)=n+1$. Si f es la función del ejemplo 4, el dominio de f es el conjunto de los números pares, ya que son los únicos números enteros cuya mitad es también un número entero; f asigna a cada número par su mitad, de modo que $f(2)=1$, $f(4)=2$ y, en general, $f(2n)=n$. (Pero no tiene sentido preguntarse por $f(5)$, ya que una función sólo asigna valores a los elementos de su dominio y $5 \notin \text{dom}(f)$.)

Obsérvese que un objeto b es un valor de una función f si y sólo si hay algún objeto $a \in \text{dom}(f)$ tal que $f(a)=b$, es decir, tal que $\langle a,b\rangle \in f$. En otras palabras, ser un valor de una función no es más que pertenecer a su recorrido, por lo que *el conjunto de los valores de una función es su recorrido*. En símbolos,

$$\text{rec}(f)=\{f(x) : x \in \text{dom}(f)\}.$$

Toda función es una relación y, por tanto, un conjunto (de pares ordenados). Por consiguiente, las funciones son extensionales, es decir, cumplen el principio de extensionalidad: f y g son iguales (son la misma función) si tienen los mismos elementos, o sea, si a ellas pertenecen los mismos pares. Ahora bien, para todo par $\langle a,b\rangle$,

$$\langle a,b\rangle \in f \text{ sii } a \in \text{dom}(f) \text{ y } f(a)=b$$

y

$$\langle a,b\rangle \in g \text{ sii } a \in \text{dom}(g) \text{ y } g(a)=b,$$

de modo que

$$f=g \text{ sii } \text{dom}(f)=\text{dom}(g) \text{ y para todo } a \in \text{dom}(f), f(a)=g(a);$$

en otras palabras, las funciones f y g son iguales si y sólo si tienen el mismo dominio y asignan los mismos valores a cada argumento.

Una manera clara y natural de definir una función consiste en especificar cuál es su dominio e indicar qué valor asigna la función a cada elemento del dominio. Por ejemplo:

1. f es la función cuyo dominio es el conjunto A de las palabras castellanas y tal que para cada $p \in A$, $f(p)$ es la primera letra de p. Así, f asigna a cada palabra su primera letra.
2. g es la función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $g(n) = n^2$. Así, g asigna a cada número entero su cuadrado.
3. h es la función en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $h(n)$ es el número de cifras de n.

Decimos que f **es una función de** A **en** B, en símbolos,

$$f : A \longrightarrow B,$$

si $\text{dom}(f) = A$ y $\text{rec}(f) \subseteq B$; en otras palabras, una función de A en B es una función con dominio A todos cuyos valores pertenecen a B. Así,

1. la función f que asigna a cada palabra castellana su primera letra es una función del conjunto A de las palabras castellanas en el conjunto L de las letras del alfabeto, o sea, $f : A \longrightarrow L$.
2. la función g que asigna a cada número entero su cuadrado es una función del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, o sea, $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.
3. la función h que asigna a cada número natural su número de cifras es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, o sea, $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Naturalmente, si los valores de una función pertenecen a un conjunto B, pertenecen también a cualquier conjunto que incluya a B; por tanto,

$$\text{si } f : A \longrightarrow B \text{ y } B \subseteq C, \text{ entonces } f : A \longrightarrow C.$$

Si el recorrido de una función es igual a B, decimos que la función es sobre B. Así, f es una **función de** A **sobre** B si y sólo si $\text{dom}(f) = A$ y $\text{rec}(f) = B$. De modo equivalente, f es una función de A sobre B si y sólo si

1. $\text{dom}(f) = A$ y
2. para todo $b \in B$ hay algún $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Claramente, toda función es una función de su dominio sobre su recorrido.

EJEMPLOS

1. La función que a cada número entero le asigna su cuadrado es una función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$, ya que el cuadrado de un número entero es un número natural, pero no es una función de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{N}$, ya que no todo número natural es el cuadrado de un número entero. Esta función es sobre el conjunto de los números cuadrados, es decir, de los números $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
2. La función que asigna a cada elemento x de un conjunto A su conjunto unitario $\{x\}$ es una función de A en $\mathcal{P}(A)$, ya que todo subconjunto unitario de A es un elemento de $\mathcal{P}(A)$, pero no es sobre $\mathcal{P}(A)$, ya que no todo subconjunto de A es unitario. Esta función es sobre el conjunto de los subconjuntos unitarios de A.
3. La función que asigna a cada número entero n su opuesto $-n$ es una función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, ya que el opuesto de un número entero es un número entero. Es también sobre $\mathbb{Z}$, ya que todo número entero es el opuesto de un número entero.

Una función f es **inyectiva** sii para cualesquiera $x, y \in \text{dom}(f)$,

$$\text{si } f(x) = f(y), \text{ entonces } x = y,$$

o, lo que es equivalente,

$$\text{si } x \neq y, \text{ entonces } f(x) \neq f(y);$$

en otras palabras, una función es inyectiva si y sólo si asigna valores distintos a argumentos distintos.

EJEMPLOS

1. La función f que asigna a cada palabra castellana su primera letra no es inyectiva, ya que hay palabras distintas que empiezan por la misma letra.
2. La función g que asigna a cada número entero su cuadrado no es inyectiva, ya que, por ejemplo, $g(4) = 16$ y $g(-4) = 16$, pero $4 \neq -4$.
3. La función h que asigna a cada número entero n su opuesto $-n$ es inyectiva, ya que números distintos tienen opuestos distintos: si $n \neq m$, entonces $-n \neq -m$, es decir, $h(n) \neq h(m)$.
4. La función F que asigna a cada elemento x de un conjunto A su conjunto unitario $\{x\}$ es inyectiva, ya que objetos distintos dan lugar a unitarios distintos: si $x \neq y$, entonces $\{x\} \neq \{y\}$, es decir, $F(x) \neq F(y)$.

Puesto que toda función es una relación y toda relación tiene su relación inversa, siempre podemos considerar la relación inversa $\widetilde{f}$ de una función cualquiera f. Naturalmente,

$$\langle b, a \rangle \in \widetilde{f} \text{ sii } f(a) = b.$$

Si bien $\widetilde{f}$ es siempre una relación, es posible que no sea una función. Así, si f es la función que a cada palabra castellana le asigna su número de letras, $\widetilde{f}$ no es una función, ya que un mismo número está relacionado por $\widetilde{f}$ con distintas palabras: $\langle 3, \text{voz}\rangle \in \widetilde{f}$, $\langle 3, \text{mar}\rangle \in \widetilde{f}$, pero voz $\neq$ mar. Del mismo modo, la relación inversa de la función g que asigna a cada número entero su cuadrado no es una función, ya que, por ejemplo, $\langle 16,4\rangle \in \widetilde{g}$ y $\langle 16,-4\rangle \in \widetilde{g}$, pero $4 \neq -4$. La razón de que $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ no sean funciones hay que buscarla en la falta de inyectividad de f y de g, de acuerdo con la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 4.1. *Una función f es inyectiva sii $\widetilde{f}$ es también una función.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función. Por definición de $\widetilde{f}$ tenemos que

$\widetilde{f}$ es una función sii para todo x,y,b: si $\langle b,x\rangle \in \widetilde{f}$ y $\langle b,y\rangle \in \widetilde{f}$, $x=y$,
sii para todo x,y,b: si $\langle x,b\rangle \in f$ y $\langle y,b\rangle \in f$, $x=y$,
sii para todo x,y,b: si $f(x)=b$ y $f(y)=b$, $x=y$,
sii para todo x,y: si $f(x)=f(y)$, $x=y$,
sii f es inyectiva. □

Si f es una función inyectiva, definimos f^{-1} como $\widetilde{f}$, o sea,

$$f^{-1} = \widetilde{f}$$

y decimos que f^{-1} es la **función inversa** de f.

No olvidemos que sólo podemos hablar de f^{-1} cuando f es una función inyectiva. Si f no es inyectiva, la notación «f^{-1}» carece de sentido.

EJEMPLOS

1. La función G de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que asigna a cada número natural n su sucesor inmediato $n+1$ es inyectiva. Así, G posee función inversa. El dominio de G^{-1} es el conjunto $\mathbb{N}^{+}$ de los números enteros positivos. Si $n \in \mathbb{N}^{+}$, es decir, si $n > 0$, entonces $G^{-1}(n) = n-1$. G^{-1} es una función de $\mathbb{N}^{+}$ sobre $\mathbb{N}$.
2. La función f que asigna a cada número entero n su número opuesto $-n$ es inyectiva, de modo que tiene función inversa, f^{-1}. El dominio de f^{-1} es $\mathbb{Z}$, pues todo número entero es el opuesto de un número entero. Si $n \in \mathbb{Z}$, n es el opuesto de $-n$, es decir, $f(-n)=n$. Así, $\langle -n,n\rangle \in f$, por lo que $\langle n,-n\rangle \in f^{-1}$, es decir, $f^{-1}(n) = -n$. Vemos, pues, que para todo número entero n, $f^{-1}(n)$, es el opuesto de n, de modo que $f^{-1}(n) = f(n)$. Esto significa que f^{-1} y f son la misma función.

3. La función F que asigna a cada elemento x de un conjunto A el conjunto unitario $\{x\}$ es inyectiva. Si $\mathcal{B}$ es el conjunto de los subconjuntos unitarios de A, F^{-1} es una función de $\mathcal{B}$ sobre A. Para cada $\{x\} \in \mathcal{B}$, $F^{-1}(\{x\}) = x$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Para toda función inyectiva f,*

(1) *f^{-1} es una función inyectiva,*
(2) $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{rec}(f)$ *y* $\mathrm{rec}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$,
(3) *para cualesquiera objetos a y b, $f(a)=b$ sii $f^{-1}(b)=a$.*

La justificación de esta proposición es simple y se deja como ejercicio para el lector.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Supongamos que $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$. La **composición** de las funciones g y f, en símbolos, $g \circ f$, es la función de A en C tal que para todo $a \in A$,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Así, para obtener el valor de la función $g \circ f$ en el argumento a aplicamos en primer lugar la función f a a, obteniendo $f(a)$, y a continuación aplicamos la función g a $f(a)$, lo cual es posible, ya que $f(a)$ pertenece a B, que es el dominio de g. De este modo obtenemos $g(f(a))$, que es precisamente $(g \circ f)(a)$.

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ a & \longrightarrow & f(a) & \longrightarrow & g(f(a)) \end{array}$$

EJEMPLO

Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y f y g son las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = 5n \quad \text{y} \quad g(n) = n^2,$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{lllllllll} (g \circ f)(n) & = & g(f(n)) & = & g(5n) & = & (5n)^2 & = & 25n^2, \\ (f \circ g)(n) & = & f(g(n)) & = & f(n^2) & = & 5n^2, & & \\ (f \circ f)(n) & = & f(f(n)) & = & f(5n) & = & 5(5n) & = & 25n, \\ (g \circ g)(n) & = & g(g(n)) & = & g(n^2) & = & (n^2)^2 & = & n^4. \end{array}$$

Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, la función $g \circ f$ es la relación

$$g \circ f = \{\langle a,c \rangle : a \in A \text{ y } c = g(f(a))\},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \langle a,c \rangle \in (g \circ f) \quad & \text{sii} \quad g(f(a)) = c, \\ & \text{sii} \quad \text{hay algún } x \text{ tal que } f(a) = x \text{ y } g(x) = c, \\ & \text{sii} \quad \text{hay algún } x \text{ tal que } \langle a,x \rangle \in f \text{ y } \langle x,c \rangle \in g, \\ & \text{sii} \quad \langle a,c \rangle \in (f|g). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$g \circ f = f|g,$$

es decir, *la composición de las funciones g y f es el producto relacional de las relaciones f y g.*

IMAGEN DE UN CONJUNTO POR UNA FUNCIÓN

Si f es una función con dominio A y $X \subseteq A$, la **imagen de X por f**, en símbolos, $f[X]$, es el conjunto de los valores que f asigna a los elementos de X. Así,

$$f[X] = \{f(x) : x \in X\}.$$

Por consiguiente,

$$y \in f[X] \quad \text{sii} \quad \text{hay } x \in X \text{ tal que } f(x) = y.$$

Naturalmente,

$$f[\emptyset] = \emptyset \qquad \text{y} \qquad f[A] = \text{rec}(f).$$

PROPOSICIÓN 4.3. *Si f es una función con dominio A y X, Y son subconjuntos de A, entonces*

(1) *si $X \subseteq Y$, entonces $f[X] \subseteq f[Y]$,*
(2) $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$,
(3) $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$,
(4) $f[X] - f[Y] \subseteq f[X - Y]$.

DEMOSTRACIÓN. (1) es claro. Pasemos a (2). Dado que $X \subseteq X \cup Y$ y que $Y \subseteq X \cup Y$, de (1) se sigue que $f[X] \subseteq f[X \cup Y]$ y que $f[Y] \subseteq f[X \cup Y]$; pero entonces, $f[X] \cup f[Y] \subseteq f[X \cup Y]$. Justifiquemos la inclusión inversa. Supongamos que $b \in f[X \cup Y]$. Así, hay $a \in X \cup Y$ tal que $f(a) = b$. Ahora bien, $a \in X$ o $a \in Y$. En el primer caso, $b \in f[X]$ y en el segundo $b \in f[Y]$; en cualquier caso, $b \in f[X] \cup f[Y]$.

Por ser b un elemento arbitrario de $f[X \cup Y]$, concluimos que $f[X \cup Y] \subseteq f[X] \cup f[Y]$.

Justifiquemos (3). Puesto que $X \cap Y \subseteq X$ y $X \cap Y \subseteq Y$, (1) nos permite concluir que $f[X \cap Y] \subseteq f[X]$ y que $f[X \cap Y] \subseteq f[Y]$. Por tanto, $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$.

Ocupémonos finalmente de (4). Supongamos que $b \in f[X] - f[Y]$. Así, $b \in f[X]$ y $b \notin f[Y]$. Dado que $b \in f[X]$, hay un elemento de X, digamos a, tal que $f(a) = b$. Dado que $b \notin f[Y]$, b no es un valor de f en ningún elemento de Y. Así, $a \notin Y$ (pues b es el valor de f en el argumento a). Por consiguiente, $a \in X - Y$, de donde $b = f(a) \in f[X - Y]$. Por ser b un elemento arbitrario de $f[X] - f[Y]$, concluimos que $f[X] - f[Y] \subseteq f[X - Y]$. □

Obsérvese que la inclusión inversa de (3), $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$, no es válida en general, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO

Sea f la función constante cero con dominio $\{0,1\}$. Así,

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Si $X = \{0\}$ y $Y = \{1\}$, entonces

$$f[X \cap Y] = f[\emptyset] = \emptyset, \quad \text{pero } f[X] \cap f[Y] = \{0\}.$$

La función de este ejemplo no es inyectiva. La siguiente proposición nos dice que esto no es accidental.

PROPOSICIÓN 4.4. *Supongamos que f es una función con dominio A. f es inyectiva si y sólo si para cualesquiera $X, Y \subseteq A$, $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que f es inyectiva y sean $X, Y \subseteq A$. Por (3), basta mostrar que $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$. Sea, pues, $b \in f[X] \cap f[Y]$. Por la definición de imagen de un conjunto, hay $a \in X$ y $a' \in Y$ tales que $f(a) = b$ y $f(a') = b$. Por ser f inyectiva, $a = a'$. Así, $a \in X \cap Y$, de donde $b \in f[X \cap Y]$. Puesto que b es un elemento arbitrario de $f[X] \cap f[Y]$, podemos concluir que $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$.

Supongamos ahora que f no es inyectiva. Debemos mostrar que hay $X, Y \subseteq A$ tales que $f[X] \cap f[Y] \neq f[X \cap Y]$. Puesto que f no es inyectiva, hay $a, a' \in A$ tales que $a \neq a'$ pero $f(a) = f(a')$. Sean $X = \{a\}$ y $Y = \{a'\}$. Puesto que $X \cap Y = \emptyset$, $f[X \cap Y] = \emptyset$; pero $f[X] \cap f[Y] = \{f(a)\} \neq \emptyset$. □

La inclusión inversa de (4), $f[X - Y] \subseteq f[X] - f[Y]$, también puede no cumplirse, como se pone de manifiesto con la misma función y los mismos conjuntos del ejemplo anterior. La razón es también la falta de inyectividad de la función.

PROPOSICIÓN 4.5. *Supongamos que f es una función con dominio A. f es inyectiva si y sólo si para cualesquiera $X,Y \subseteq A$, $f[X-Y] = f[X] - f[Y]$.*

Dejamos la justificación de esta proposición como ejercicio.

ANTIIMAGEN DE UN CONJUNTO POR UNA FUNCIÓN

Si f es una función de un conjunto A en un conjunto B y $Y \subseteq B$, la **antiimagen de Y por f**, en símbolos, $f^{-1}[Y]$, es el subconjunto de A definido por

$$f^{-1}[Y] = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Así, si $x \in A$,

$$x \in f^{-1}[Y] \text{ sii } f(x) \in Y.$$

Naturalmente

$$f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \quad \text{y} \quad f^{-1}[B] = A.$$

No debemos confundir el uso de «f^{-1}» en la designación de antiimágenes con su uso como nombre de la función inversa de f. Como sabemos, sólo las funciones inyectivas tienen función inversa, mientras que siempre podemos considerar la antiimagen de un conjunto por cualquier función, inyectiva o no.

PROPOSICIÓN 4.6. *Si $f : A \longrightarrow B$ y Y, Z son subconjuntos de B, entonces*

(1) *si $Y \subseteq Z$, entonces $f^{-1}[Y] \subseteq f^{-1}[Z]$,*
(2) $f^{-1}[Y \cup Z] = f^{-1}[Y] \cup f^{-1}[Z]$,
(3) $f^{-1}[Y \cap Z] = f^{-1}[Y] \cap f^{-1}[Z]$,
(4) $f^{-1}[Y - Z] = f^{-1}[Y] - f^{-1}[Z]$.

DEMOSTRACIÓN. (1) es claro. Con respecto a (2), debemos mostrar que para todo $x \in A$,

$$f(x) \in Y \cup Z \text{ sii } f(x) \in Y \text{ o } f(x) \in Z.$$

Pero esto es inmediato por la definición de la unión. Con la misma facilidad se justifican (3) y (4). □

PROPOSICIÓN 4.7. *Si f es una función de A en B, entonces*

(1) *si $X \subseteq A$, $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$,*
(2) *si $Y \subseteq B$, $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$.*
(3) *f es inyectiva sii para todo $X \subseteq A$, $X = f^{-1}[f[X]]$,*
(4) *f es sobre B si y sólo si para todo $Y \subseteq B$, $Y = f[f^{-1}[Y]]$.*

Dejamos la justificación de esta proposición como ejercicio.

2. Biyectabilidad

Si A y B son conjuntos cualesquiera, una **biyección** entre A y B es una función inyectiva de A sobre B.

EJEMPLOS

1. La función que asigna a cada elemento x de un conjunto A el conjunto unitario $\{x\}$ es una biyeción entre A y el conjunto de todos los subconjuntos unitarios de A.
2. La función que asigna a cada número entero n su opuesto $-n$ es una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$.
3. La función H que a cada subconjunto de un universo del discurso U le asigna su complemento con respecto a U,

$$H(A) = \overline{A}^{U},$$

es una biyección entre $\mathcal{P}(U)$ y $\mathcal{P}(U)$.
4. Para todo conjunto A, la relación de identidad

$$\mathrm{Id}_A = \{\langle x,y \rangle : x,y \in A,\ x = y\}$$

es una biyección entre A y A.

PROPOSICIÓN 4.8. *Para cualesquiera conjuntos A,B,C,*

(1) Id_A *es una biyección entre A y A,*
(2) *si f es una biyección entre A y B, f^{-1} es una biyección entre B y A,*
(3) *si f es una biyección entre A y B y g es una biyección entre B y C, entonces $g \circ f$ es una biyección entre A y C.*

DEMOSTRACIÓN. (1) es claro. Pasemos, pues, a (2). Sea f una biyección entre A y B. Por ser f inyectiva, f^{-1} es una función de la que ya sabemos que es inyectiva. El dominio de f^{-1} es el recorrido de f y el recorrido de f^{-1} es el dominio de f. Así, por ser f una función de A sobre B, f^{-1} es una función de B sobre A, o sea, una biyección entre B y A.

Ocupémonos finalmente de (3). Supongamos que f es una biyección entre A y B y que g es una biyección entre B y C. Sabemos que $g \circ f : A \longrightarrow C$. Debemos verificar que $g \circ f$ es inyectiva y sobre C.

Para mostrar que $g \circ f$ es inyectiva, sean $x,y \in A$ y supongamos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Esto significa que $g(f(x)) = g(f(y))$. Puesto que g es inyectiva, tenemos que $f(x) = f(y)$. Pero también f es inyectiva. Así $x = y$. Por ser x,y elementos cualesquiera de A, concluimos que $g \circ f$ es inyectiva.

Para verificar que $g \circ f$ es sobre C debemos ver que todo elemento de C es un valor de $g \circ f$. Sea, pues, c un elemento de C. Por ser g sobre C, hay $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Por ser f sobre B, hay $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Así $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Puesto que c es un elemento arbitrario de C, concluimos que $g \circ f$ es sobre C. □

PROPOSICIÓN 4.9. *Si f es una biyección entre los conjuntos A y B, entonces*

(1) $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$,

(2) $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$.

DEMOSTRACIÓN. Sea f es una biyección entre A y B. Así, f^{-1} es una biyección entre B y A y para todo $a \in A$ y todo $b \in B$,

$$f(a) = b \quad \text{sii} \quad f^{-1}(b) = a. \tag{4.1}$$

Dado que $f : A \longrightarrow B$ y que $f^{-1} : B \longrightarrow A$, podemos componer f^{-1} con f y también f con f^{-1}, de modo que

$$(f^{-1} \circ f) : A \longrightarrow A \quad \text{y} \quad (f \circ f^{-1}) : B \longrightarrow B.$$

Por (4.1), para cada $a \in A$, $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a$ y, para cada $b \in B$, $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = b$. Así, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$. □

Mostramos ahora que las dos igualdades de la proposición anterior caracterizan f^{-1}.

PROPOSICIÓN 4.10. *Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ y*

(1) $g \circ f = \mathrm{Id}_A$,

(2) $f \circ g = \mathrm{Id}_B$,

entonces f es una biyección entre A y B y $g = f^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que a y a' son elementos de A. Si $f(a) = f(a')$, entonces $g(f(a)) = g(f(a'))$. Pero, por (1), $g(f(a)) = a$ y $g(f(a')) = a'$, de modo que $a = a'$. Esto significa que f es inyectiva.

Veamos ahora que f es sobre B. Si $b \in B$, entonces, por (2), $f(g(b)) = b$. Así, hay $a \in A$ (a saber, $g(b)$) tal que $f(a) = b$. Puesto que b es un elemento cualquiera de B, concluimos que f es sobre B. Por tanto, f es una biyección entre A y B.

Nos queda por verificar que $g = f^{-1}$. Dado que tanto g como f^{-1} tienen el mismo dominio, B, para mostrar que $g = f^{-1}$, debemos ver que para todo $b \in B$, $g(b) = f^{-1}(b)$, es decir, que para todo $b \in B$ y todo $a \in A$,

$$g(b) = a \quad \text{sii} \quad f(a) = b.$$

Ahora bien, por (2), $f(a) = b$ sii $f(a) = f(g(b))$, de modo que, por inyectividad de f, $f(a) = b$ sii $a = g(b)$. □

Decimos que dos conjuntos A y B son **biyectables**, en símbolos, $A \sim B$, si hay una biyección entre A y B.

El siguiente corolario se obtiene inmediatamente de la proposición 4.8.

COROLARIO 4.11. *Para cualesquiera conjuntos A, B, C,*



(1) $A \sim A$,

(2) *si* $A \sim B$, *entonces* $B \sim A$,

(3) *si* $A \sim B$ *y* $B \sim C$, *entonces* $A \sim C$.

La relación de biyectabilidad entre conjuntos es de suma importancia para dar cuenta del concepto de cardinalidad o de número de elementos de un conjunto. Si sabemos que dos conjuntos A y B son biyectables y que A tiene 30 elementos, podemos concluir que B tiene también 30 elementos. Además, para explicar qué significa que un conjunto tenga 30 elementos apelamos también a la relación de biyectabilidad: que A tenga 30 elementos quiere decir que es posible contar A, que es posible enumerar los elementos de A con los 30 primeros números naturales; en otras palabras, que es posible establecer una biyección entre A y el conjunto de los 30 primeros números naturales. Para discutir este concepto y otros relacionados, como los de finitud e infinitud, debemos ocuparnos antes con cierto detenimiento de los números naturales. Lo haremos en el capítulo siguiente.

3. Isomorfismo

Supongamos que R y S son relaciones en los conjuntos A y B, respectivamente. Un **isomorfismo** entre el par $\langle A, R\rangle$ y el par $\langle B, S\rangle$ es una biyección h entre A y B tal que para cualesquiera elementos x, y de A,

$$xRy \quad \text{sii} \quad h(x)Sh(y).$$

Si hay un isomorfismo entre $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$, decimos que los pares $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$ son **isomorfos** y escribimos

$$\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle.$$

De modo informal, si h es un isomorfismo entre $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$, h establece una correspondencia entre los elementos de A y los de B de modo tal que los

elementos de A se relacionan por R del mismo modo que sus correspondientes en B se relacionan por S. Así, si $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$ son isomorfos, R «se comporta» en A exactamente como S «se comporta» en B.

EJEMPLOS

1. Sean $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{5,6,7,8\}$, $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$ y $S=\{\langle 5,7\rangle,\langle 6,8\rangle,\langle 8,5\rangle\}$. La función h de A en B definida por $h(n)=n+4$ es un isomorfismo entre $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$.
2. Sean $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ y $B=\{a,b,c,d,e,f\}$. Si $<^A$ y $<^B$ son los órdenes parciales estrictos en A y B, respectivamente, representados por los diagramas siguientes,



entonces $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$ son isomorfos. La función h de A en B tal que $h(1)=a$, $h(2)=b$, $h(3)=c$, $h(4)=d$, $h(5)=e$ y $h(6)=f$ es un isomorfismo entre $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$.
3. Sean A, B, $<^A$ y $<^B$ como en el ejemplo anterior. La función g de A en B tal que $g(1)=b$, $g(2)=a$, $g(3)=c$, $g(4)=d$, $g(5)=f$ y $g(6)=e$ es otro isomorfismo entre $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle B,<^B\rangle$. Además, la función f de A en A definida por $f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=3$, $f(4)=4$, $f(5)=6$ y $f(6)=5$ es un isomorfismo entre $\langle A,<^A\rangle$ y $\langle A,<^A\rangle$.
4. La función $h:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ definida por $h(n)=n+1$ es un isomorfismo entre $\langle\mathbb{Z},<^{\mathbb{Z}}\rangle$ y $\langle\mathbb{Z},<^{\mathbb{Z}}\rangle$, pues h es una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ y para cualesquiera $n,m\in\mathbb{Z}$, $n<^{\mathbb{Z}}m$ si y sólo si $n+1<^{\mathbb{Z}}m+1$.

PROPOSICIÓN 4.12. *Supongamos que R y S son relaciones en A y en B, respectivamente, y sea h un isomorfismo entre $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$.*

(1) *R es reflexiva en A sii S es reflexiva en B,*
(2) *R es irreflexiva sii S es irreflexiva,*
(3) *R es simétrica sii S es simétrica,*
(4) *R es asimétrica sii S es asimétrica,*
(5) *R es antisimétrica sii S es antisimétrica,*
(6) *R es transitiva sii S es transitiva.*

DEMOSTRACIÓN. Justificamos únicamente (1) y (6), dejando los casos restantes como ejercicio para el lector.

(1) Supongamos que R es reflexiva en A y veamos que S es reflexiva en B. Sea $b\in B$. Puesto que h es sobre B, sea $a\in A$ tal que $h(a)=b$. Por ser R reflexiva en A, aRa. Así, por ser h un isomorfismo, $h(a)Sh(a)$, es decir, bSb, como debíamos mostrar. Justifiquemos el condicional inverso. Supongamos que S es reflexiva en B y concluyamos que R es reflexiva en A. Sea $a\in A$. Por ser S reflexiva en B, $h(a)Sh(a)$. Así, por ser h un isomorfismo, aRa, de modo que R es reflexiva en A.

(6) Supongamos que R es transitiva y verifiquemos que S también lo es. Sean $x,y,z\in B$ tales que xSy y ySz. Debemos concluir que xSz. Por ser h sobre B, hay $u,v,w\in A$ tales que $h(u)=x$, $h(v)=y$ y $h(w)=z$. Así, $h(u)Sh(v)$ y $h(v)Sh(w)$. Por ser h un isomorfismo, uRv y vRw. Así, por ser R transitiva, uRw. Pero entonces, por ser h un isomorfismo, $h(u)Sh(w)$, es decir, xSz, como debíamos mostrar. Justifiquemos el condicional inverso. Supongamos que S es transitiva y concluyamos que R también lo es. Sean $u,v,w\in A$ tales que uRv y vRw. Por ser h un isomorfismo, $h(u)Sh(v)$ y $h(v)Sh(w)$. Así, por ser S transitiva, $h(u)Sh(w)$. Pero entonces, por ser h un isomorfismo, uRw, de modo que R es transitiva. □

COROLARIO 4.13. *Si $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$, entonces*

(1) *R es una relación de equivalencia en A sii S es una relación de equivalencia en B,*
(2) *R es un orden parcial estricto en A sii S es un orden parcial estricto en B,*
(3) *S es un orden parcial reflexivo en A sii S es un orden parcial reflexivo en B,*
(4) *R es un orden lineal (reflexivo o estricto) en A sii S es un orden lineal (reflexivo o estricto) en B.*

DEMOSTRACIÓN. Las tres primeras partes se siguen de la proposición anterior. Así, en vista de (2) y (3), sólo debemos justificar (4), para lo cual basta mostrar que si x,y son elementos de A, x, y son comparables con respecto a R si y sólo si $h(x)$, $h(y)$ los son con respecto a S. Pero esto es inmediato a partir de la definición de isomorfismo. □

La siguiente proposición es análoga a la proposición 4.8.

PROPOSICIÓN 4.14. *Si R, S y T son relaciones en los conjuntos A, B y C, respectivamente, entonces*

(1) Id_A *es un isomorfismo entre $\langle A,R\rangle$ y $\langle A,R\rangle$,*

(2) *si h es un isomorfismo entre $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$, h^{-1} es un isomorfismo entre $\langle B,S\rangle$ y $\langle A,R\rangle$,*

(3) *si h es un isomorfismo entre $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$ y g es un isomorfismo entre $\langle B,S\rangle$ y $\langle C,T\rangle$, $g\circ h$ es un isomorfismo entre $\langle A,R\rangle$ y $\langle C,T\rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) es claro. Pasemos a (2). Sea h un isomorfismo entre $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$. Así, h es una biyección entre A y B. Por (2) de la proposición 4.8, h^{-1} es una biyección entre B y A. Nos falta, pues, mostrar que si u, v son elementos cualesquiera de B, uSv sii $h^{-1}(u)Rh^{-1}(v)$. Sean $x=h^{-1}(u)$ y $y=h^{-1}(v)$. Así, $h(x)=u$ y $h(y)=v$. Por ser h un isomorfismo, tenemos que xRy sii $h(x)Sh(y)$, es decir, $h^{-1}(u)Rh^{-1}(v)$ sii uSv, como debíamos mostrar.

Ocupémonos de (3). Sea h es un isomorfismo entre $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$ y sea g es un isomorfismo entre $\langle B,S\rangle$ y $\langle C,T\rangle$. Por (3) de la proposición 4.8, $g\circ h$ es una biyección entre A y C. Para concluir la prueba nos falta mostrar que para cualesquiera $x,y\in A$, xRy sii $g(h(x))Tg(h(y))$. Sean, pues, $x,y\in A$. Puesto que h es un isomorfismo, tenemos que xRy sii $h(x)Sh(y)$. Así, puesto que g también lo es, $h(x)Sh(y)$ sii $g(h(x))Tg(h(y))$. Por consiguiente, xRy sii $g(h(x))Tg(h(y))$, como debíamos mostrar. □

El siguiente corolario, análogo al corolario 4.11, se sigue inmediatamente de la proposición anterior.

COROLARIO 4.15. *Si R, S y T son relaciones en los conjuntos A, B y C, respectivamente, entonces*

(1) $\langle A,R\rangle\cong\langle A,R\rangle$,

(2) *si* $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$, *entonces* $\langle B,S\rangle\cong\langle A,R\rangle$,

(3) *si* $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$ *y* $\langle B,S\rangle\cong\langle C,T\rangle$, *entonces* $\langle A,R\rangle\cong\langle C,T\rangle$.

4. Operaciones en un conjunto

Una función asigna un único valor a cada argumento, es decir, a cada elemento de su dominio; cada uno de los valores de la función, suele decirse, depende de su argumento. En ciertas situaciones es conveniente disponer de un concepto más general de función que nos permita considerar funciones cuyos valores dependan de dos o más argumentos. Consideremos por ejemplo la suma de números enteros. Al sumar dos números obtenemos un cierto valor, que depende de los dos sumandos, por lo que podemos considerar la suma como una función de dos argumentos. Lo mismo ocurre con la resta y con el producto; son funciones cuyos valores dependen de dos argumentos, el minuendo y el sustraendo en el primer caso, el multiplicando y el multiplicador en el segundo. De hecho, como el caso de la resta pone de manifiesto, el valor no depende sólo

de cuáles son los argumentos, sino también del orden en que son considerados; depende del par ordenado de los dos argumentos.

Así, podemos ver una función de dos argumentos, a_1,a_2, como una simple función de un solo argumento, a saber, el par ordenado $\langle a_1,a_2\rangle$. Con toda precisión, una función de dos argumentos, o, como diremos, **una función binaria** de un conjunto A en un conjunto B, es una función cuyo dominio es el conjunto A^2 de todos los pares ordenados de elementos de A y cuyos valores pertenecen a B.

Si f es una función binaria de A en B y a_1,a_2 son elementos de A, escribiremos normalmente

$$f(a_1,a_2)$$

en vez de

$$f(\langle a_1,a_2\rangle).$$

Podemos considerar también funciones ternarias, como la función que asigna a cada tres números naturales su media aritmética. Naturalmente, **una función ternaria** de un conjunto A en un conjunto B es una función cuyo dominio es el conjunto A^3 de todos los triplos ordenados de elementos de A y cuyos valores pertenecen a B. En general, si n es un entero positivo, **una función n-aria** de A en B es una función cuyo dominio es A^n, el conjunto de todos los n-tuplos de elementos de A, y cuyos valores pertenecen a B. En este contexto, una función de A en B es **una función unaria** de A en B.

Si $n\geq 2$, f es una función n-aria de A en B y $a_1,a_2,\dots,a_n$ son elementos de A, escribiremos normalmente

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

en vez de

$$f(\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle).$$

A menudo nos encontramos con funciones (unarias, binarias, ternarias, etc.) en un cierto conjunto cuyos valores pertenecen también al mismo conjunto. Así, la suma de dos números naturales es un número natural y la suma de dos números enteros es un número entero. En estos casos decimos que la función es una *operación* en el conjunto en cuestión. Con toda precisión: si A es una conjunto cualquiera, una **operación unaria** en A es una función unaria de A en A, una **operación binaria** en A es una función binaria de A en A, una **operación ternaria** en A es una función ternaria de A en A. En general, para todo número entero positivo n, una **operación n-aria** en A es una función n-aria de A en A, es decir, es una función de A^n en A.

La suma y el producto de números naturales, esto es, las funciones F y G de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$ definidas por

$$F(n,m)=n+m \quad \text{y} \quad G(n,m)=n\cdot m,$$

son operaciones binarias en el conjunto $\mathbb{N}$. La resta de números enteros es una operación binaria en el conjunto $\mathbb{Z}$. Sin embargo, la resta no es una operación en $\mathbb{N}$, ya que aunque n y m sean números naturales $n-m$ no es siempre un

número natural; es sólo una función binaria de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$. La función que a cada número natural n le asigna su sucesor $n+1$ es una operación unaria en $\mathbb{N}$. La función f que asigna a cada triplo de números naturales el producto del primero por la suma de los dos restantes, es decir la función de $\mathbb{N}^3$ en $\mathbb{N}$ definida por

$$f(n,m,k) = n \cdot (m+k),$$

es una operación ternaria en $\mathbb{N}$. Finalmente, la función h de $\mathbb{N}^4$ en $\mathbb{N}$ definida por

$$h(n,m,k,l) = (n+m) \cdot (k+l)$$

es una función cuaternaria en $\mathbb{N}$.

5. Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones? ¿Cuál es su dominio?

   (a) $\{\langle n,m\rangle : n,m$ son enteros positivos y $n \cdot 5 = m\}$,

   (b) $\{\langle n,m\rangle : n,m$ son enteros positivos y $m \cdot 5 = n\}$,

   (c) $\{\langle n,m\rangle : n,m$ son enteros positivos y $m < n\}$,

   (d) $\{\langle n,m\rangle : n$ es un entero positivo y $m = 3\}$.

2. Definamos la función f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ por

$$f(n) = 2n.$$

   ¿Es f inyectiva? ¿es sobre $\mathbb{N}$? ¿es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$?

3. Definamos la función F de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ por

$$F(n) = n+7.$$

   ¿Es F inyectiva? ¿es sobre $\mathbb{N}$? ¿es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$?

4. Definamos la función h de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ por

$$h(n) = n+7.$$

   ¿Es h inyectiva? ¿es sobre $\mathbb{Z}$? ¿es una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$?

5. Definamos la función g de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ por

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

   ¿Es g inyectiva? ¿es sobre $\mathbb{N}$? ¿es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$?

6. Definamos la función f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ por

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

   ¿Es f inyectiva? ¿es sobre $\mathbb{N}$ ¿es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$?

7. Definamos la función H de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ por

$$H(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

   ¿Es H inyectiva? ¿es sobre $\mathbb{N}$? ¿es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$?

8. Definamos la función h de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ por

$$h(n) = \begin{cases} -(n/2) & \text{si } n \text{ es par,} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Verifique que h es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

9. Cien personas se examinan. Las calificaciones posibles son $0,1,2,\ldots,10$. Sea A el conjunto de estas cien personas, sea B el conjunto de las calificaciones posibles y sea f la función que asigna a cada persona la nota que obtiene en el examen. Sabemos que exactamente tres personas han suspendido, es decir, han obtenido una calificación menor que 5. ¿Es f inyectiva? ¿es sobre B?

10. Muestre que la interseccion $f \cap g$ de dos funciones es una función. ¿Es cierto que si $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$, entonces $f \cap g : A \longrightarrow B$?

11. Muestre que la intersección $\bigcap \mathcal{F}$ de una colección no vacía de funciones $\mathcal{F}$ es una función.

12. (a) Halle dos funciones f y g cuya unión $f \cup g$ no sea una función.

    (b) Muestre que la unión $f \cup g$ de dos funciones f y g es una función si y sólo si $f(x) = g(x)$ para todo objeto $x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$.

13. Sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones tal que para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}$, $f \subseteq g$ o $g \subseteq f$. Muestre que la unión $\bigcup \mathcal{F}$ es una función.

14. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A y definamos la funcion F de A en A/R por

$$F(a) = [a]_R,$$

    es decir, F asigna a cada elemento de A su clase de equivalencia. Muestre que F es sobre A/R. ¿En qué caso es F inyectiva?

15. Sean f y g las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definidas por

$$f(n) = 3n+5 \quad \text{y} \quad g(n) = n^2.$$

(a) Calcule $(f\circ f)(0), (f\circ g)(5), (g\circ f)(2), (g\circ g)(7)$.

(b) Halle las expresiones generales de $(f\circ f)(n), (f\circ g)(n), (g\circ f)(n), (g\circ g)(n)$.

16. Sea $U = \{1,2,3,4,5\}$. Definamos la función F de $\mathcal{P}(U)$ en $\mathcal{P}(U)$ por

$$F(X) = U - X$$

(así, F asigna a cada subconjunto de U su complemento con respecto a U). Definamos también la función G de $\mathcal{P}(A)$ en $\mathbb{N}$ por

$$G(X) = \text{ número de elementos de } X.$$

Describa las composiciones $F\circ F$ y $G\circ F$.

17. Supongamos que $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$. Así, $(g\circ f) : A \longrightarrow C$. Supongamos también que f y g son ambas inyectivas. Sea $D = g[f[A]]$. Muestre que

(a) $g\circ f$ es inyectiva,

(b) $(g\circ f)^{-1} : D \longrightarrow A$,

(c) $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

18. Sea f una función con dominio A. Muestre que f es inyectiva si y sólo si para cualesquiera $X,Y \subseteq A$, $f[X-Y] = f[X] - f[Y]$.

19. Muestre que si $f : A \longrightarrow B$ y $X \subseteq A$, entonces $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$.

20. Muestre que si $f : A \longrightarrow B$ y $Y \subseteq B$, entonces $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$.

21. Sea $f : A \longrightarrow B$. Muestre que f es inyectiva si y sólo si para todo $X \subseteq A$, $X = f^{-1}[f[X]]$.

22. Sea $f : A \longrightarrow B$. Muestre que f es sobre B si y sólo si para todo $Y \subseteq B$, $Y = f[f^{-1}[Y]]$.

23. Sea A un conjunto no vacío y sea f una función de B en C. Muestre que f es inyectiva si y sólo si para todo par de funciones g y h de A en B,

$$\text{si } f\circ g = f\circ h, \text{ entonces } g = h.$$

24. Sea $f : A \longrightarrow B$ y sea C un conjunto de más de un elemento. Muestre que f es sobre B si y sólo si para todo par de funciones g y h de B en C,

$$\text{si } g\circ f = h\circ f, \text{ entonces } g = h.$$

25. Es obvio que si g es la función de identidad en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, g es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ tal que $g\circ g = g$. Ahora bien,

(a) ¿hay alguna función g de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ distinta de la identidad, tal que $g\circ g = g$?

(b) ¿hay alguna biyección g entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ distinta de la identidad, tal que $g\circ g = g$?

(c) ¿hay alguna biyección g entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ distinta de la identidad, tal que $g\circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$?

26. Supongamos que $f : A \longrightarrow B$. Sea F la función de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{P}(A)$ que asigna a cada subconjunto de B su antiimagen por f, es decir, para todo $Y \subseteq B$,

$$F(Y) = f^{-1}[Y].$$

Muestre que

(a) si f es inyectiva, entonces F es sobre $\mathcal{P}(A)$,

(b) si f es sobre B, entonces F es inyectiva,

(c) si F es inyectiva, entonces f es sobre B,

(d) si F es sobre $\mathcal{P}(A)$, entonces f es inyectiva.

27. Sea h un isomorfismo entre los órdenes lineales estrictos $\langle A, <^A\rangle$ y $\langle B, <^B\rangle$. Muestre que, para todo $x \in A$,

(a) x es el elemento mínimo del orden $\langle A, <^A\rangle$ si y sólo si $h(x)$ es el elemento mínimo del orden $\langle B, <^B\rangle$,

(b) x es el elemento máximo del orden $\langle A, <^A\rangle$ si y sólo si $h(x)$ es el elemento máximo del orden $\langle B, <^B\rangle$.

28. Sea h un isomorfismo entre los órdenes lineales estrictos $\langle A, <^A\rangle$ y $\langle B, <^B\rangle$. Muestre que, para cualesquiera $x,y \in A$, x es el predecesor inmediato de y en el orden $\langle A, <^A\rangle$ si y sólo si $h(x)$ es el predecesor inmediato de $h(y)$ en el orden $\langle B, <^B\rangle$.

29. Sean $\langle A, <^A\rangle$ y $\langle B, <^B\rangle$ órdenes lineales estrictos isomorfos. Muestre que

(a) $\langle A, <^A\rangle$ es discreto si y sólo si $\langle B, <^B\rangle$ lo es,

(b) $\langle A, <^A\rangle$ es denso si y sólo si $\langle B, <^B\rangle$ lo es.

30. Sean $\langle A, <^A\rangle$ y $\langle B, <^B\rangle$ órdenes lineales estrictos. Una función h de A en B es **estrictamente creciente** si y sólo si para cualesquiera $x,y \in A$,

$$\text{si } x <^A y, \text{ entonces } h(x) <^B h(y).$$

Muestre que h es isomorfismo entre $\langle A, <^A\rangle$ y $\langle B, <^B\rangle$ si y sólo si h es una función estrictamente creciente de A sobre B.

Capítulo 5
CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

1. Los números naturales

Todos estamos familiarizados con los números naturales, es decir, con los números enteros no negativos, $0, 1, 2, 3, \ldots$ Ahora bien, ¿podemos sistematizar adecuadamente nuestro conocimiento? Dicho de otro modo, ¿podemos seleccionar algunos principios básicos sobre los números naturales que, por así decir, compendien todo lo que sabemos sobre ellos? De esto nos ocupamos ahora.

La idea básica de nuestra concepción de los números naturales es que todo número natural distinto de cero se obtiene a partir del número cero aplicando una o más veces la operación sucesor, la operación que asigna a cada número n el número $n+1$. Así, para describir todos los números naturales nos bastan dos símbolos: uno, 0, para el número **cero** y otro, S, para la operación **sucesor**. Los dos primeros principios sobre los números naturales son obvios:

P1 0 *es un número natural.*

P2 *Si n es un número natural, también lo es Sn.*

Estos dos principios nos permiten obtener o generar todos los números naturales. Gracias a P1 obtenemos directamente el número 0. Aplicando P2 a 0 obtenemos el número 1 ($= S0$). Si ahora aplicamos P2 a 1, obtenemos el número 2 ($= S1$). Una nueva aplicación de P2 nos permite obtener el número 3, otra aplicación el número 4, una más el número 5, etc. Esquemáticamente,

$$
\begin{aligned}
1 &= S0 \\
2 &= S1 = SS0 \\
3 &= S2 = SS1 = SSS0 \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Omitimos los paréntesis para mayor claridad, escribiendo, en general, «Sn» en vez de «$S(n)$». Así, «SSS0» está en lugar de «$S(S(S(0)))$».

Sin embargo, estos dos principios no son suficientes para caracterizar los números naturales, y no lo son por una razón muy simple. P1 y P2 nos permiten concluir que 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... *son* números naturales, pero no que éstos son *todos* los números naturales. Necesitamos un tercer principio que diga que todo número natural o bien es 0 o bien se obtiene a partir de 0 aplicando sucesivamente la operación sucesor. Ahora bien, ¿cómo expresaremos «aplicando sucesivamente» de una manera aceptable? No podemos dejarlo como está, ya que cuando decimos «sucesivamente» queremos decir «*una* vez, o *dos* veces, o *tres* veces, o ...», de modo que la comprensión de este «sucesivamente» presupone la comprensión de los números naturales, por lo que no podemos apelar a ella para precisar el concepto de número natural.

Podemos proceder de manera indirecta con ayuda del concepto de conjunto. Nos basta observar que todo conjunto que cumpla los principios P1 y P2 (es decir, que contenga 0 y que contenga el sucesor de cada uno de sus elementos) contendrá todos los números naturales (y, posiblemente, otras cosas más). Así, puesto que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales cumple estos dos principios, es el *menor* conjunto que los cumple; es decir, si X es un conjunto cualquiera que cumple los principios P1 y P2, entonces $\mathbb{N} \subseteq X$. Éste es el tercer principio que buscábamos. Lo formulamos así:

P3 (Principio de inducción) *Si X es un conjunto tal que*

(1) $0 \in X$ *y*

(2) *para todo número natural n, si $n \in X$, entonces $Sn \in X$,*

entonces todo número natural pertenece a X.

Nos hacen falta más principios. Como hemos visto, P1, P2 y P3 nos garantizan que los números naturales son $0, 1, 2, 3, \ldots$, pero no nos garantizan que estos números sean todos distintos. Si lo único que supiéramos de los números naturales fuera P1, P2 y P3, no podríamos concluir que, por ejemplo, $5 \neq 0$, o que $5 \neq 26$ (es decir, no podríamos concluir que al ir aplicando la operación sucesor obtendríamos siempre nuevos números). Para ello introducimos los dos últimos principios.

P4 0 *no es sucesor de ningún número natural (es decir, para todo número natural n, $0 \neq Sn$).*

P5 *Números naturales distintos tienen sucesores distintos (es decir, si $n \neq m$, entonces $Sn \neq Sm$).*

El principio de inducción es un método eficiente de demostración. De acuerdo con P3, si queremos mostrar que todo número natural pertenece a cierto conjunto X, basta mostrar que X cumple (1) y (2), es decir, basta mostrar que

(1) $0 \in X$ y

(2) para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \in X$, entonces $Sn \in X$.

Para establecer (2), consideramos un número natural arbitrario, n, suponemos que $n \in X$ y mostramos que $Sn \in X$. En este contexto, nos referimos a la suposición de que $n \in X$ como la *hipótesis inductiva*. Veamos un ejemplo de *demostración por inducción*.

PROPOSICIÓN 5.1. *Para todo número natural n, $Sn \neq n$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} : Sn \neq n\}$. Debemos mostrar que todo número natural pertenece a X. Ahora bien, $S0 \neq 0$, ya que, por P4, 0 no es sucesor de ningún número natural. Por tanto,

(1) $0 \in X$.

Sea ahora $n \in X$ y supongamos (hipótesis inductiva), que $n \in X$. Así, $Sn \neq n$. Por P5 podemos concluir ahora que $SSn \neq Sn$. Pero esto significa que $Sn \in X$. Hemos mostrado, pues, que

(2) para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \in X$, entonces $Sn \in X$.

Así, por el principio de inducción, todo número natural pertenece a X, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, $Sn \neq n$. □

Podemos usar también el principio de inducción para mostrar que todo número natural posee cierta propiedad. Para ello, basta mostrar que (i) 0 posee la propiedad en cuestión y (ii) esta propiedad se transmite de cada número a su sucesor. Con mayor precisión,

PROPOSICIÓN 5.2. (REFORMULACIÓN DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN) *Dada una propiedad Φ, si*

(i) *0 posee la propiedad Φ y*
(ii) *para todo $n \in \mathbb{N}$, si n posee la propiedad Φ, Sn también la posee,*

entonces todo número natural posee la propiedad Φ.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Φ es una propiedad para la que se cumplen (i) y (ii) y sea X el conjunto de todos los números naturales que la poseen:

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \Phi(n)\}.$$

Puesto que pertenecer a X no es otra cosa que poseer la propiedad Φ, (i) y (ii) nos dicen que (1) $0 \in X$ y (2) para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \in X$, entonces $Sn \in X$.

Por tanto, por el principio de inducción, todo número natural pertenece a $\mathbb{N}$, es decir, todo número natural posee la propiedad Φ. □

Con los axiomas que introdujimos en el capítulo 2 no podemos demostrar la existencia del conjunto de los números naturales. Para ello debemos añadir un nuevo principio, el **axioma de infinitud**, que dice precisamente que hay un conjunto $\mathbb{N}$ que cumple los principios P1–P5. Con mayor precisión, el axioma de infinitud dice que hay un conjunto $\mathbb{N}$, un objeto $0 \in \mathbb{N}$ y una función $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que

(a) si $n \in \mathbb{N}$, $S(n) \neq 0$,
(b) si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$, entonces $S(n) \neq S(m)$,
(c) si $X \subseteq \mathbb{N}$ es tal que (1) $0 \in X$ y (2) si $n \in X$, $S(n) \in X$, entonces $X = \mathbb{N}$.

2. El orden de los números naturales

Sea $<^{\mathbb{N}}$ o, simplemente, $<$ la relación de orden natural en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales,

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < n < n+1 < \ldots$$

Sabemos que

P6 *$<$ es un orden lineal estricto en $\mathbb{N}$.*

Como vimos en el capítulo 3, hay muchos órdenes lineales estrictos en $\mathbb{N}$. Queremos hallar unos pocos principios que caractericen el orden natural $<$. Algo que sabemos acerca de $<$ es:

P7 *Para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$, $k < Sn$ sii $k \leq n$.*

Este principio expresa que Sn es el sucesor inmmediato de n en el orden natural.

De estos dos principios (juntamente con P1–P5) se sigue todo cuanto sabemos sobre el orden natural de los números naturales. Pasamos a obtener algunas consecuencias de P1–P7 que hacen referencia al orden $<$.

PROPOSICIÓN 5.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n < Sn$. Así, $\mathbb{N}$ no tiene elemento máximo.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n$, de modo que, por P7, $n < Sn$. □

PROPOSICIÓN 5.4. *$\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo, el número 0.*

DEMOSTRACIÓN. Mostramos por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n$. De acuerdo con la proposición 5.2 (aplicada a la propiedad *ser mayor o igual que* 0) sólo debemos mostrar que

(i) $0 \leq 0$,

(ii) para todo número natural n, si $0 \leq n$, entonces $0 \leq Sn$.

Ahora bien, (i) es inmediato, ya que ciertamente $0 = 0$. En cuanto a (ii), supongamos (hipótesis inductiva) que $0 \leq n$. Por la proposición 5.3, $n < Sn$. Así, por P6, $0 \leq Sn$, que es lo que debíamos mostrar. □

PROPOSICIÓN 5.5. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, Sn es el sucesor inmediato de n.*

DEMOSTRACIÓN. Por P7, $n < Sn$. Si Sn no fuera el sucesor inmediato de n, habría un número natural k tal que $n < k$ y $k < Sn$. Puesto que $k < Sn$, por P7 concluimos que $k \leq n$. Pero esto es absurdo, ya que $n < k$. Así, Sn es el sucesor inmediato de n. □

PROPOSICIÓN 5.6. *Todo número natural distinto de cero tiene predecesor inmediato.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n = 0 \text{ o } n \text{ tiene predecesor inmediato}\}$. Es obvio que

(1) $0 \in X$.

Además, por la Proposición 5.5, si $n \in \mathbb{N}$, entonces $Sn \in X$, de modo que

(2) para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \in X$, entonces $Sn \in X$.

Por tanto, por el principio de inducción, todo número natural pertenece a X, es decir, todo número natural distinto de 0 tiene predecesor inmediato. □

PROPOSICIÓN 5.7. *Para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, $n < k$ sii $Sn < Sk$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Supongamos en primer lugar que $n < k$. Por ser Sn el sucesor inmediato de n, $Sn \leq k$. Pero $k < Sk$. Así, $Sn < Sk$. Supongamos ahora, inversamente, que $Sn < Sk$. Por ser Sk el sucesor inmediato de k, $Sn \leq k$. Pero $n < Sn$. Por tanto, $n < k$. □

Si X es un conjunto de números naturales y $n \in \mathbb{N}$, decimos que n es el **elemento mínimo de** X si $n \in X$ y para todo $k \in X$, $n \leq k$; decimos que n es el **elemento máximo de** X si $n \in X$ y para todo $k \in X$, $k \leq n$. Así, si X es el conjunto de los números naturales pares mayores que 5, X tiene elemento mínimo, el número 6, pero X no tiene elemento máximo. Si Y es el conjunto de los números naturales impares de cuatro cifras, Y tiene elemento mínimo, 1001, y elemento máximo, 9999.

PROPOSICIÓN 5.8. *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Supongamos, en busca de una contradicción, que A no tiene elemento mínimo. Consideremos el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \text{ para todo } k \leq n, k \notin A\}.$$

Así, un número natural n pertenece a X si y sólo si ni n ni ningún número menor que n pertenece a A. Es claro que $0 \notin A$, ya que A no tiene elemento mínimo. Puesto que 0 es el elemento mínimo de $\mathbb{N}$, si $k \leq 0$, $k = 0$. Así, para todo $k \leq 0$, $k \notin A$, es decir,

(1) $0 \in X$.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ y supongamos inductivamente que $n \in X$. Así, para todo $k \leq n$, $k \notin A$, de modo que $Sn \notin A$ (ya que, en caso contrario, Sn sería el inexistente elemento mínimo de A). En consecuencia, para todo $k \leq Sn$, $k \notin A$. Esto significa que $Sn \in X$. Hemos mostrado, pues, que

(2) para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \in X$, entonces $Sn \in X$.

Así, por el principio de inducción, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \in X$, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $k \leq n$, $k \notin A$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \notin A$, de modo que $A = \emptyset$, en contra de la suposición inicial. Esta contradicción muestra que la suposición de que A no tiene elemento mínimo es falsa. □

La proposición que acabamos de justificar nos ofrece un nuevo método para demostrar que todos los números naturales tienen cierta propiedad. Es el principio de inducción completa, que formulamos y justificamos a continuación.

PROPOSICIÓN 5.9. (PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA) *Si Φ es una propiedad tal que, para todo número natural n,*
(∗) si todo número menor que n tiene la propiedad Φ, también la tiene n,
entonces todo número natural tienen la propiedad Φ.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, en busca de una contradicción, que se cumple la hipótesis de la proposición pero no su conclusión. Así, el conjunto A de

los números naturales que *no* tienen la propiedad Φ no es vacío y, por la proposición 5.8, tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A. Los números naturales menores que n no pertenecen a A y, por tanto, todos tienen la propiedad Φ. Pero entonces, por $(*)$, n tiene la propiedad Φ, es decir, $n \notin A$, lo cual es absurdo, ya que n es el elemento mínimo de A. □

El principio de inducción completa es, como P3 y la proposición 5.2, un método expeditivo de demostración. Nos dice que para mostrar que todo número natural tiene cierta propiedad basta mostrar que todo número natural n tiene la propiedad en cuestión *en el supuesto de que todo número natural menor que n la tiene.* En el transcurso de una demostración por inducción completa, nos referimos a este supuesto como a la *hipótesis inductiva.*

Decimos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ es **acotado** si hay un número natural mayor o igual que todos los elementos de X. Es claro que todo conjunto de números naturales con elemento máximo es acotado, ya que el elemento máximo de un conjunto es ciertamente mayor o igual que todos los elementos del conjunto. La siguiente proposición nos dice que, inversamente, todo conjunto acotado no vacío de números naturales tiene elemento máximo.

PROPOSICIÓN 5.10. *Todo conjunto acotado no vacío de números naturales tiene elemento máximo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un subconjunto acotado no vacío de $\mathbb{N}$. Sea Y el conjunto de los números naturales estrictamente mayores que todos los elementos de X:

$$Y = \{n \in \mathbb{N} : \text{ para todo } k \in X, k < n\}.$$

Puesto que X es acotado, $Y \neq \emptyset$. Así, por la proposición 5.8, Y tiene elemento mínimo, digamos n. Puesto que todos los elementos de X son estrictamente menores que todos los elementos de Y y $X \neq \emptyset$, $n \neq 0$. Por la proposición 5.6, n tiene predecesor inmediato, digamos k, de manera que $n = Sk$. Mostraremos que k es el elemento máximo de X.

Si $m \in X$, $m < n$, es decir, $m < Sk$. Así, por P7, $m \leq k$, de modo que todos los elementos de X son menores o iguales que k. Para concluir que k es el elemento máximo de X, nos basta ver que $k \in X$. Ahora bien, si $k \notin X$, entonces todos los elementos de X serían estrictamente menores que k, de manera que $k \in Y$. Pero esto es imposible, ya que Sk es el elemento mínimo de Y y $k < Sk$. Por tanto, k es el elemento máximo de X. □

3. Conjuntos finitos

Un conjunto finito es aquel cuyos elementos pueden ser contados. ¿Qué es contar? Cuando contamos los elementos de un conjunto asignamos sucesivamente números naturales a sus elementos, de modo que a cada elemento del conjunto se le asigna un número natural y sólo uno. Normalmente empezamos a contar por el número 1. Si lo hacemos así y al contar asignamos a los elementos del conjunto X los números $1,2,3,4$ y 5, decimos que el conjunto tiene cinco elementos, ya que 5 es el último número usado. Aquí no lo haremos exactamente así, sino que empezaremos a contar por el número 0. Contaremos los elementos del conjunto $X = \{a,b,c,d,e\}$ con los números $0,1,2,3$ y 4. Y diremos que X tiene 5 elementos porque 5 es el menor número no usado para contar los elementos de X.

Con el fin de describir con precisión el concepto de contar, consideramos, para cada número natural n, el conjunto

$$\mathrm{I}_n = \{k \in \mathbb{N} : k < n\},$$

que es el **segmento inicial** de números naturales determinado por n. Así, I_n es el conjunto de los números naturales estrictamente menores que n, de manera que, por ejemplo, $\mathrm{I}_5 = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathrm{I}_1 = \{0\}$ e $\mathrm{I}_0 = \emptyset$.

Lo que hacemos al contar los elementos de un conjunto es establecer una biyección entre un segmento inicial de números naturales y el conjunto en cuestión. Si $X = \{a,b,c,d,e\}$ y contamos los elementos de X en el orden en que los hemos representado, obtenemos la siguiente biyección entre I_5 y X:

$$\{\langle 0,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 3,d\rangle, \langle 4,e\rangle\}.$$

Si contamos en el orden opuesto, la biyección que establecemos es

$$\{\langle 0,e\rangle, \langle 1,d\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 3,b\rangle, \langle 4,a\rangle\}.$$

Otro orden en el proceso de contar da lugar a otra biyección entre I_5 y X:

$$\{\langle 0,b\rangle, \langle 1,e\rangle, \langle 2,d\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 4,c\rangle\}.$$

X tiene 5 elementos, ya que el dominio de cualquiera de estas biyecciones es I_5.

Pero ¿cómo sabemos que si contamos X en otro orden no obtendremos una biyección entre, por ejemplo, I_7 y X? Más generalmente, ¿cómo sabemos que si contamos sin errores los elementos de un mismo conjunto obtendremos siempre el mismo resultado? Éste es un hecho que requiere justificación.

Empecemos definiendo con precisión el concepto de finitud. Un conjunto es **finito** si y sólo si es biyectable con un segmento inicial de números naturales. Dicho de otro modo, un conjunto A es finito si y sólo si hay un número natural n tal que $\mathrm{I}_n \sim A$. Así, $\emptyset$ es finito, ya que $\mathrm{I}_0 = \emptyset$ y, por tanto, $\mathrm{I}_0 \sim \emptyset$.

LEMA 5.11. *Si $A \sim B$, $a \in A$ y $b \in B$, entonces hay una biyección g entre A y B tal que $g(a) = b$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una biyección entre A y B. Si $f(a) = b$, no hay nada que mostrar. Supongamos, pues, que $f(a) \neq b$. Modificaremos f para obtener

una biyección g tal que $g(a) = b$. Sea $y = f(a)$ y sea $x = f^{-1}(b)$, es decir, $f(x) = b$. Definamos la función $g : A \longrightarrow B$ de modo que, para cada $z \in A$,

$$g(z) = \begin{cases} b & \text{si } z = a, \\ y & \text{si } z = x, \\ f(z) & \text{si } z \neq a \text{ y } z \neq x; \end{cases}$$

es decir

$$g = (f - \{\langle a,y\rangle, \langle x,b\rangle\}) \cup \{\langle a,b\rangle, \langle x,y\rangle\}.$$

No es difícil comprobar, con la ayuda de un sencillo diagrama, que g es la biyección buscada. □

PROPOSICIÓN 5.12. *Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, si $I_n \sim I_m$, entonces $n = m$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos el principio de inducción. Sea

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \text{ para todo } m \in \mathbb{N}, \text{ si } I_n \sim I_m, \text{ entonces } n = m\}.$$

Debemos mostrar que todo número natural pertenece a X.

En primer lugar, $I_0 = \emptyset$. Así, si $I_0 = I_m$, también $I_m = \emptyset$. Pero entonces, claramente, $0 = m$, de modo que

(1) $0 \in X$.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ y supongamos inductivamente que $n \in X$, es decir, que para todo m, si $I_n \sim I_m$, entonces $n = m$. Concluiremos que $Sn \in X$, es decir, que para todo m, si $I_{Sn} \sim I_m$, entonces $Sn = m$.

Puesto que $I_{Sn} \neq \emptyset$, $m \neq 0$. Hay, pues, $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = Sk$. Por el lema anterior, hay una biyección g entre I_{Sn} y I_m tal que $g(n) = k$. Así, la función

$$h = g - \{\langle n,k\rangle\}$$

es una biyección entre I_n y I_k. Por la hipótesis inductiva, $n = k$. Pero entonces, $Sn = Sk = m$, según queríamos mostrar. En consecuencia,

(2) para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \in X$, entonces $Sn \in X$.

Por (1) y (2), el principio de inducción nos permite concluir que todo número natural pertenece a X. □

COROLARIO 5.13. *Si A es un conjunto finito, hay un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n \sim A$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto finito. Por definición de finitud, hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n \sim A$. Debemos mostrar que este n es único, es decir, que si m es tal que $I_m \sim A$, entonces $n = m$. Pero esto se sigue de la proposición 5.12, ya que si $I_n \sim A$ y $I_m \sim A$, entonces $I_n \sim I_m$. □

Este corolario nos permite definir qué entendemos por el número de elementos de un conjunto finito: si A es un conjunto finito, el **número de elementos** de A es el único $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n \sim A$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, I_n es un conjunto finito de n elementos.

Concluimos nuestra presentación del concepto de finitud con dos proposiciones cuya demostración dejamos como ejercicio.

PROPOSICIÓN 5.14. *Todo conjunto biyectable con un conjunto finito es finito.*

PROPOSICIÓN 5.15. *Todo subconjunto de un conjunto finito es un conjunto finito.*

4. Conjuntos infinitos

Un conjunto **infinito** es, por definición, un conjunto no finito. Por tanto, un conjunto infinito es un conjunto cuyos elementos no pueden ser contados, o sea, un conjunto no biyectable con ningún segmento inicial de números naturales. El ejemplo principal de conjunto infinito es el conjunto de los números naturales. Es intuitivamente claro que es infinito, pero ¿cómo lo demostramos?

PROPOSICIÓN 5.16. *$\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbb{N}^+$ el conjunto de los números naturales positivos, es decir, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$. De acuerdo con P5, la operación sucesor S es una función inyectiva y, por la proposición 5.6, es sobre $\mathbb{N}^+$. S es, pues, una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^+$.

Supongamos, en busca de una contradicción, que $\mathbb{N}$ es finito. Sea n el número de elementos de $\mathbb{N}$. Así, $I_n \sim \mathbb{N}$. Dado que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$, I_n es también biyectable con $\mathbb{N}^+$. Sea, pues, g una biyección entre I_n y $\mathbb{N}^+$. Definamos la función $h : I_{Sn} \longrightarrow \mathbb{N}$ así:

$$h(k) = \begin{cases} g(k) & \text{si } k < n, \\ 0 & \text{si } k = n; \end{cases}$$

es decir, $h = g \cup \{\langle n,0\rangle\}$. Dado que $\mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$, h es una biyección entre I_{Sn} y $\mathbb{N}$. Así, $I_{Sn} \sim \mathbb{N}$. Pero también $I_n \sim \mathbb{N}$. En consecuencia, $I_n \sim I_{Sn}$, en contradic-

ción con la proposición 5.12. Esta contradicción nos permite concluir que $\mathbb{N}$ es infinito. □

PROPOSICIÓN 5.17. *Si A es infinito, entonces para todo conjunto B,*

(1) *si $A \sim B$, B es infinito,*

(2) *si $A \subseteq B$, B es infinito,*

(3) *si hay una función inyectiva de A en B, B es infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Los dos primeros puntos son reformulaciones de las proposiciones 5.14 y 5.15. El tercero se sigue de los dos primeros, ya que toda función inyectiva es una biyección entre su dominio y su recorrido. □

Los números naturales nos permiten clasificar los conjuntos finitos con respecto a su número de elementos o, como también decimos, su cardinalidad. Hay infinitas clases de conjuntos finitos según su cardinalidad: hay un conjunto de cero elementos, hay conjuntos de un elemento, de dos elementos, etc. ¿Qué podemos decir a este respecto de los conjuntos infinitos? ¿Tienen todos la misma cardinalidad, el mismo número de elementos?

¿Qué queremos decir con esta pregunta? ¿Disponemos acaso de números infinitos con los que medir la magnitud de los conjuntos infinitos? Si reflexionamos un poco, descubriremos que podemos dar sentido a la pregunta sin necesidad de apelar a números infinitos; lo único que debemos hacer es generalizar apropiadamente lo que ocurre en el caso de los conjuntos finitos. Dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos si y sólo si son biyectables. Dado que tiene sentido preguntarse por la existencia de una biyección entre dos conjuntos aunque los conjuntos en cuestión sean infinitos, nuestro intento de pregunta acerca de si todos los conjuntos infinitos tienen o no la misma cardinalidad se convierte en una pregunta inteligible: si A y B son conjuntos infinitos, ¿hay siempre una biyección entre A y B? Intuitivamente, una respuesta afirmativa significaría que todos los conjuntos infinitos tienen la misma magnitud, la misma cardinalidad, son igual de grandes, mientras que una respuesta negativa podría abrir el camino a una teoría de la magnitud o de la cardinalidad de los conjuntos infinitos.

Puesto que ya sabemos que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es infinito, la pregunta anterior puede reformularse así: ¿son todos los conjuntos infinitos biyectables con $\mathbb{N}$? Decimos que un conjunto es **numerable** si es finito o es biyectable con $\mathbb{N}$. Una respuesta afirmativa a la pregunta anterior sería equivalente a la afirmación de que todos los conjuntos son numerables. Antes de aventurar una respuesta, ocupémonos brevemente de estos conjuntos. Dado que la relación de biyectabilidad es transitiva, la siguiente proposición es obvia.

PROPOSICIÓN 5.18. *Si A es numerable y $A \sim B$, B es también numerable.*

El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito numerable. Además, si a es un número natural cualquiera, el conjunto A_a de todos los números naturales mayores o iguales que a,

$$A_a = \{n \in \mathbb{N} : a \leq n\},$$

o, en otras palabras, $A_a = \mathbb{N} - \mathrm{I}_a$, es también infinito numerable, ya que la función h de $\mathbb{N}$ en A_a definida por $h(n) = n + a$ es una biyección entre $\mathbb{N}$ y A_a. También es infinito numerable el conjunto $\mathbb{P}$ de los números naturales pares, ya que la función que asigna a cada número su doble es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$. Otros conjuntos numerables son el conjunto $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ de los números cuadrados y el conjunto de los números primos.

PROPOSICIÓN 5.19. *Todo conjunto infinito de números naturales es numerable.*

No demostraremos aquí esta proposición, puesto que nos faltan los instrumentos para hacerlo con rigor. Pero no es difícil ver cómo hallar los valores sucesivos de una biyección g entre $\mathbb{N}$ y un conjunto infinito A de números naturales. $g(0)$ es el elemento mínimo de A, $g(1)$ es el elemento mínimo de $A - \{g(0)\}$, es decir el menor elemento de A mayor que $g(0)$, $g(2)$ es el menor elemento de A mayor que $g(1)$, $g(3)$ el menor elemento de A mayor que $g(2)$, etc. En general, si ya hemos hallado $g(n)$, $g(Sn)$ será el menor elemento de A mayor que $g(n)$. Este procedimiento funciona, ya que A no tiene elemento máximo.

COROLARIO 5.20. *Un conjunto es numerable sii es biyectable con un subconjunto de $\mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato que todo conjunto numerable es biyectable con un subconjunto de $\mathbb{N}$. Así, lo único que debemos mostrar es que todo conjunto biyectable con un subconjunto de $\mathbb{N}$ es numerable. Supongamos, pues, que $A \sim B$ y $B \subseteq \mathbb{N}$. Hemos de ver que A es numerable. Ahora bien, A es finito o es infinito. Si es finito, es ciertamente numerable; si es infinito, también lo es B. Así, por la proposición anterior, B es numerable. Por tanto, por la proposición 5.18, A es también numerable. □

COROLARIO 5.21. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es un conjunto numerable.*

Dejamos la demostración de este corolario como ejercicio.

PROPOSICIÓN 5.22. *Un conjunto no vacío A es numerable sii hay una función de $\mathbb{N}$ sobre A.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto no vacío numerable. Si A es infinito, hay una biyección entre $\mathbb{N}$ y A; en particular, hay una función de $\mathbb{N}$ sobre A. Si A es finito, hay $n > 0$ y una biyección, f, entre I_n y A. Sea g la la función con dominio $\mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$f(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } k < n, \\ f(0) & \text{si } k \geq n. \end{cases}$$

Es claro que g es sobre A. Así, tanto si A es finito como infinito, hay una función de $\mathbb{N}$ sobre A.

Justifiquemos ahora el condicional inverso. Supongamos que g es una función de $\mathbb{N}$ sobre un conjunto A. Claramente, $A \neq \emptyset$. Definamos la función h de A en $\mathbb{N}$ por:

$$h(a) = \text{el menor número } n \text{ tal que } g(n) = a.$$

No es difícil ver que h es inyectiva y que, por consiguiente, es una biyección entre A y un subconjunto de $\mathbb{N}$. Por el corolario 5.20, A es numerable. □

PROPOSICIÓN 5.23. *El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es infinito numerable.*

DEMOSTRACIÓN. La función $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$h(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par}, \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ es impar}, \end{cases}$$

es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. □

Puesto que $\mathbb{Z}$ es la unión de $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números negativos, la proposición que acabamos de demostrar es un caso particular de la siguiente.

PROPOSICIÓN 5.24. *La unión de dos conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sean A y B conjuntos numerables. Si uno de ellos es vacío, no hay nada que justificar. Supongamos, pues, que ni A ni B son vacíos. Por la proposición 5.22, hay funciones f y g de $\mathbb{N}$ sobre A y B, respectivamente. Definamos la función h con dominio $\mathbb{N}$ así:

$$h(n) = \begin{cases} f(n/2) & \text{si } n \text{ es par}, \\ g((n-1)/2) & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

Vemos que si $a = f(n)$ y $b = g(n)$, entonces $a = h(2n)$ y $b = h(2n+1)$, de modo que h es una función de $\mathbb{N}$ sobre $A \cup B$. Por la proposición 5.22, $A \cup B$ es numerable. □

PROPOSICIÓN 5.25. *El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito es claro por la proposición 5.17, ya que $\mathbb{N} \times \{0\}$ es infinito, por ser biyectable con $\mathbb{N}$, y $\mathbb{N} \times \{0\}$ es un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Para ver que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, por el corolario 5.20 basta mostrar que es biyectable con un subconjunto de $\mathbb{N}$. Definamos la función $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ así:

$$h(\langle n, m \rangle) = 2^n 3^m.$$

Puesto que 2 y 3 son números primos y todo número natural admite una única descomposición en factores primos, vemos que si $2^n 3^m = 2^k 3^l$, entonces $n = k$ y $m = l$, es decir $\langle n, m \rangle = \langle k, l \rangle$. En otras palabras, si $h(\langle n, m \rangle) = h(\langle k, l \rangle)$, entonces $\langle n, m \rangle = \langle k, l \rangle$, de modo que h es inyectiva. En consecuencia, h es una biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y su recorrido, un subconjunto de $\mathbb{N}$. □

PROPOSICIÓN 5.26. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales (negativos, cero y positivos) es infinito numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ es infinito. Para ver que es numerable, procedemos de modo análogo a la demostración de la proposición anterior, definiendo una función inyectiva de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{N}$. Todo número racional positivo se puede expresar de manera única como una fracción p/q, donde p y q son enteros positivos sin factores comunes. Cada número racional negativo es expresable de un único modo como una fracción $-p/q$, donde p y q son enteros positivos sin factores comunes. Definamos la función $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ así:

$$g(p/q) = 2^p 3^q$$

$$g(-p/q) = 2^p 3^q 5$$

$$g(0) = 0.$$

La función g nos ofrece un modo de cifrar números racionales mediante números naturales. La clave de la codificación es ésta: el exponente de 2 es el numerador del número cifrado, el exponente de 3 es su denominador. El signo (positivo o negativo) viene dado por la ausencia o la presencia del factor 5. Puesto que 2, 3 y 5 son números primos, podemos concluir como en la proposición anterior que g es inyectiva. Es, pues, una biyección entre $\mathbb{Q}$ y su recorrido, un subconjunto de $\mathbb{N}$. Por el corolario 5.20, $\mathbb{Q}$ es numerable. □

COROLARIO 5.27. *El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sean A y B conjuntos numerables. Si uno de ellos es vacío, $A \times B$ es vacío y, por tanto, numerable. Supongamos, pues, que ni A ni B son vacíos. Por la proposición 5.22, hay funciones f y g de $\mathbb{N}$ sobre A y B, respectivamente. Definamos la función h con dominio $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ así:

$$h(\langle n,m\rangle) = \langle f(n),g(m)\rangle.$$

No es difícil verificar que h es sobre $A \times B$. Puesto que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es infinito numerable, hay una biyección F entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Pero entonces la composición $h\circ F$ es una función de $\mathbb{N}$ sobre $A \times B$, por lo que, por la proposición 5.22, este conjunto es numerable. □

COROLARIO 5.28. *Si A es un conjunto numerable y $n \geq 2$, A^n es un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción, con ayuda del corolario 5.27. □

Si A es un conjunto cualquiera y $n > 1$, una **sucesión de longitud** n de elementos de A es un n-tuplo de elementos de A. Una sucesión de longitud 1 es un elemento de A. Una **sucesión finita** de elementos de A es una sucesión de longitud n para algún $n \geq 1$. De acuerdo con el corolario anterior, si A es un conjunto numerable y $n \geq 1$, el conjunto de las sucesiones de longitud n de elementos de A es numerable. Mostraremos que también lo es el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de A.

PROPOSICIÓN 5.29. *El conjunto de todas las sucesiones finitas de números naturales es infinito numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea SC este conjunto. SC es infinito, ya que el conjunto de todas las sucesiones finitas constantes,

$$\langle 0\rangle, \langle 0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0,0\rangle, \ldots$$

es un subconjunto infinito de SC. Para ver que SC es numerable, ciframos cada sucesión finita $\langle e_1,\ldots,e_n\rangle$ de números naturales mediante un número natural. Lo hacemos mediante la función $h : \mathrm{SC} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$h(\langle e_1,\ldots,e_n\rangle) = 2^{e_1+1}\cdot 3^{e_2+1}\cdot \ldots \cdot p_n^{e_n+1},$$

donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ son los n primeros números primos. Dado que todo número natural es representable de un único modo como producto de números primos, la función h es inyectiva. Pero esto significa que h es una biyección entre el conjunto SC y un subconjunto de $\mathbb{N}$, por lo que, por el corolario 5.20, SC es numerable. □

PROPOSICIÓN 5.30. *Si A es un conjunto numerable no vacío, el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de A es infinito numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto numerable no vacío y sea S el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de A. S es infinito, ya que si $a \in A$, el conjunto de todas las sucesiones finitas constantes,

$$\langle a\rangle, \langle a,a\rangle, \langle a,a,a\rangle, \langle a,a,a,a\rangle, \ldots$$

es un subconjunto infinito de S. Veamos que S es numerable. Puesto que A es numerable, hay una función f de $\mathbb{N}$ sobre A. Definamos la función g con dominio el conjunto SC de todas las sucesiones finitas de números naturales así:

$$g(\langle e_1,\ldots,e_n\rangle) = \langle f(e_1),\ldots,f(e_n)\rangle.$$

No es difícil verificar que g es sobre S. Puesto que, por la proposición anterior, SC es infinito numerable, hay una biyección F entre $\mathbb{N}$ y SC. Pero entonces la composición $g\circ F$ es una función de $\mathbb{N}$ sobre S, por lo que, por la proposición 5.22, S es un conjunto es numerable. □

Todos los conjuntos infinitos que hemos examinado son numerables, pero, como veremos ahora, no todo conjunto infinito es numerable. El conjunto de todos los conjuntos de números naturales, el conjunto potencia de $\mathbb{N}$, no lo es.

PROPOSICIÓN 5.31. *No hay ninguna función de $\mathbb{N}$ sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que F es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Mostraremos que F no es sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiendo explícitamente un subconjunto A de $\mathbb{N}$ que no es un valor de la función F.

Definiremos A de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el número n sea testigo de que $A \neq F(n)$. Es decir, si el número n es un elemento del conjunto $F(n)$, entonces n no será un elemento de A, mientras que si n no es un elemento de $F(n)$, entonces n será un elemento de A. La definición rigurosa de A es, pues,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin F(n)\}.$$

Como hemos dicho, es inmediato que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in A \text{ sii } n \notin F(n),$$

de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \neq F(n)$. A no es, pues, un valor de F. □

Corolario 5.32. *$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es infinito, si fuera numerable habría una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En particular, habría una función de $\mathbb{N}$ sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pero por la proposición que acabamos de demostrar, no la hay. □

La demostración de la proposición 5.31 que acabamos de ofrecer nos permite describir, dada una función $F:\mathbb{N}\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{N})$, un subconjunto de $\mathbb{N}$, que no es un valor de la función, a saber el conjunto

$$A_F=\{n\in\mathbb{N}:n\notin F(n)\}.$$

Veamos algunos ejemplos sencillos.

1. Si $F(n)=\{n\}$, para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $A_F=\emptyset$.
2. Si $F(n)=\mathrm{I}_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $A_F=\mathbb{N}$.
3. Si $F(n)=\{k:k<n\}$, para n par, y $F(n)=\{k:k\geq n\}$, para n impar, entonces A_F es el conjunto de los números pares.

Lo importante es que la regla que nos permite obtener A_F a partir de F es aplicable a cualquier función, por compleja que sea su definición.

Decir que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable es decir que no hay ninguna biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. El argumento que hemos ofrecido para justificarlo puede ser generalizado a cualquier conjunto en el lugar de $\mathbb{N}$. Ningún conjunto es biyectable con su conjunto potencia. Lo mostramos imitando la demostración anterior.

Proposición 5.33. *Sea A un conjunto cualquiera. No hay ninguna función de A sobre $\mathcal{P}(A)$.*

Demostración. Si $F:A\longrightarrow\mathcal{P}(A)$, sea $X=\{a\in A:a\notin F(a)\}$. Naturalmente, $X\in\mathcal{P}(A)$. Pero X no es un valor de F, ya que para todo $a\in A$,

$$a\in X \text{ sii } a\notin F(a),$$

de manera que $X\neq F(a)$. □

Teorema 5.34. (de Cantor) *Para todo conjunto A, A no es biyectable con $\mathcal{P}(A)$.*

Demostración. Por la proposición recién demostrada, no hay ninguna función de A sobre $\mathcal{P}(A)$. Así, no hay ninguna biyección entre A y $\mathcal{P}(A)$. □

Volvamos a $\mathbb{N}$. Tanto $\mathbb{N}$ como $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son infinitos. Pero no son biyectables entre sí. Esto nos sugiere que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es *mayor* que $\mathbb{N}$, que *hay más* conjuntos de números naturales que números naturales. Pero hemos de andar con mucho cuidado al hablar así de los conjuntos infinitos. Veamos un ejemplo más simple. Comparemos el conjunto $\mathbb{N}$ con el conjunto $\mathbb{P}$ de los números naturales pares. *En un sentido*, diríamos que $\mathbb{N}$ es mayor que $\mathbb{P}$, ya que $\mathbb{P}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$, pero, *en otro sentido*, diríamos que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$ son igual de grandes, ya que, como hemos visto, son biyectables. Lo importante es no confundir los distintos sentidos, por lo que antes de intentar comparar los conjuntos infinitos según su magnitud, o, como diremos, según su *cardinalidad*, debemos definir con precisión nuestros conceptos. Si no lo hacemos, podremos caer fácilmente en contradicciones debidas al uso de términos ambiguos. Hay que tener presente que nuestra experiencia con conjuntos finitos puede no ser un buen guía para el estudio de la cardinalidad de los conjuntos infinitos. Así, un conjunto finito no es nunca biyectable con un subconjunto propio suyo, mientras que $\mathbb{N}$ sí lo es. La intuición necesaria para movernos con confianza en el dominio de lo infinito debemos adquirirla lentamente, siempre a partir de conceptos precisos.

Sean A y B conjuntos cualesquiera. Decimos que

1. A y B tienen **la misma cardinalidad** sii A y B son biyectables.
2. A es de **cardinalidad menor o igual** que B, en símbolos, $A\preceq B$, sii hay una función inyectiva de A en B.
3. A es de **cardinalidad estrictamente menor** que B, en símbolos, $A\prec B$, sii $A\preceq B$ pero $A\not\sim B$.

Así, $A\preceq B$ sii A es biyectable con un subconjunto de B, mientras que $A\prec B$ sii A es biyectable con un subconjunto propio de B pero no lo es con B.

Proposición 5.35. $\mathbb{N}\prec\mathcal{P}(\mathbb{N})$. *En general, para todo conjunto A, $A\prec\mathcal{P}(A)$.*

Demostración. Sea A un conjunto cualquiera. Por el teorema 5.34, sabemos que A y $\mathcal{P}(A)$ no tienen la misma cardinalidad, es decir, no son biyectables. Así, por (3) de la definición anterior, sólo debemos mostrar que $A\preceq\mathcal{P}(A)$, es decir, que hay una función inyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$. Pero esto es fácil. Basta considerar la función F de A en $\mathcal{P}(A)$ que asigna a cada elemento de A su conjunto unitario: $F(a)=\{a\}$. □

Esta proposición nos permite concluir que hay una sucesión infinita de conjuntos infinitos de cardinalidades estrictamente crecientes:

$$\mathbb{N}\prec\mathcal{P}(\mathbb{N})\prec\mathcal{P}\mathcal{P}(\mathbb{N})\prec\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\mathbb{N})\prec\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\mathbb{N})\prec\cdots.$$

Esto no es más que el inicio. Pero aquí no podemos ocuparnos de la inmensa variedad de conjuntos infinitos descubierta por Georg Cantor (1845-1918).

5. Ejercicios

1. Muestre que si A es un conjunto finito y $A \sim B$, entonces B es un conjunto finito con el mismo número de elementos que A.

2. Muestre que si A es un conjunto finito, también lo es $A \cup \{x\}$.

3. Muestre por inducción que si $n \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathrm{I}_n$, entonces A es finito y el número de elementos de A es menor o igual que n.

4. Muestre que si $A \subset \mathrm{I}_n$ (es decir, $A \subseteq \mathrm{I}_n$ pero $A \neq \mathrm{I}_n$), entonces el número de elementos de A es estrictamente menor que n. (Use el ejercicio 3.)

5. Muestre que si A es un conjunto finito y $B \subseteq A$, entonces B es un conjunto finito y el número de elementos de B es menor o igual que el de A. Si además $B \neq A$, el número de elementos de B es estrictamente menor que el de A. (Use los ejercicios 3 y 4.)

6. Muestre que si A y B son conjuntos finitos, $A \cap B$ y $A - B$ son también finitos.

7. Muestre que si A y B son conjuntos finitos, $A \cup B$ es también finito. (Sugerencia: fije A y vea por inducción que para todo número n y todo conjunto B de n elementos, $A \cup B$ es finito. Use el ejercicio 2.)

8. Muestre que si A y B son conjuntos finitos, el producto cartesiano $A \times B$ es también finito. (Sugerencia: fije A y vea por inducción que para todo número n y todo conjunto B de n elementos, $A \times B$ es finito. Use el ejercicio 7.)

9. Muestre que si $x \notin A$ y $B = A \cup \{x\}$, entonces

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \cup \{X \cup \{x\} : X \subseteq A\}.$$

   Además A y $\{X \cup \{x\} : X \subseteq A\}$ son disjuntos y biyectables.

10. Muestre que si A es un conjunto finito, $\mathcal{P}(A)$ también lo es. (Sugerencia: muestre por inducción que, para todo número n, el conjunto potencia de un conjunto de n elementos es finito. Use el ejercicio 9.)

11. Muestre que si A es un conjunto finito y f es una función inyectiva de A en A, entonces f es sobre A.

12. Muestre que si A es un conjunto finito y f es una función de A sobre A, entonces f es inyectiva.

13. Muestre que todo subconjunto acotado de $\mathbb{N}$ es finito.

14. Defina una función de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ que no sea inyectiva.

15. Muestre que todo subconjunto de un conjunto numerable es un conjunto numerable.

SEGUNDA PARTE

LÓGICA PROPOSICIONAL

Capítulo 6

SINTAXIS DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

1. Introducción

El objeto central de la lógica es la relación de consecuencia o, dicho de otro modo, el concepto de argumento correcto. La lógica no ofrece una única precisión de este concepto aplicable a cualquier argumento, pero construye sistemas formales distintos que dan cuenta de la corrección de diferentes tipos de argumentos. La lógica proposicional, en concreto, se aplica al análisis de argumentos cuya corrección depende exclusivamente del significado de las expresiones veritativo-funcionales que aparecen en el argumento. Vamos a explicar esta idea.

En los lenguajes naturales hay expresiones que nos permiten formar enunciados compuestos a partir de otros más simples. Por ejemplo,

Aristóteles no fue un sofista,
Platón fundó la Academia y Aristóteles fundó el Liceo,

son enunciados compuestos formados a partir de otros enunciados más simples con ayuda de las partículas «no» e «y». La verdad del primero sólo depende de la verdad del enunciado «Aristóteles fue un sofista» y la del segundo sólo de la verdad de los enunciados que lo componen: «Platón fundó la Academia» y «Aristóteles fundó el Liceo». Así, algunas (pero no todas, como tendremos ocasión de ver en un capítulo posterior) de las expresiones que usamos para formar enunciados compuestos tienen una propiedad importante: la verdad o falsedad de los enunciados compuestos formados con su ayuda depende exclusivamente de (esto es, es una función de) la verdad o falsedad de los enunciados más simples que los componen. Las expresiones veritativo-funcionales del lenguaje natural son las que tienen esta propiedad; también decimos de estas expresiones que se comportan veritativo-funcionalmente. Además de las dos que acabamos de mencionar, las expresiones «o», «si..., entonces» y «si y sólo si» también tienen esta propiedad, pero, como veremos, no son las únicas.

La corrección de algunos argumentos, como por ejemplo:

> Si Platón fundó la Academia, entonces no fundó el Liceo; Platón fundó la Academia; por tanto, no fundó el Liceo

no depende de la estructura de los enunciados simples que aparecen en él, sino del significado de las expresiones veritativo funcionales que hemos usado para formar los enunciados compuestos («no» y «si..., entonces», en este caso). Pues bien, la lógica proposicional es un sistema formal que propone precisiones de todos los conceptos necesarios para analizar los argumentos cuya corrección depende exclusivamente del significado de las expresiones veritativo funcionales.

2. El lenguaje de la lógica proposicional

Un lenguaje formal tiene un componente sintáctico y otro semántico que se introducen en este orden. La sintaxis de un lenguaje formal consta de un alfabeto (o vocabulario) y de una gramática. El alfabeto del lenguaje está constituido por un conjunto de símbolos que suelen presentarse clasificados en tres categorías: lógicos, no lógicos y auxiliares (o de puntuación). Todos los lenguajes formales tienen tanto símbolos lógicos como no lógicos, pero pueden no tener símbolos auxiliares. Las expresiones del lenguaje son simplemente las sucesiones de símbolos del alfabeto, pero, del mismo modo que en los lenguajes naturales no todas las sucesiones de palabras son expresiones sintácticamente correctas, no todas las sucesiones de símbolos son aceptables. La gramática del lenguaje consiste, esencialmente, en un conjunto de reglas que nos permiten obtener o, como diremos en lo sucesivo, *generar* aquellas expresiones del lenguaje que consideramos correctamente formadas. A estas expresiones las llamaremos *fórmulas*. A continuación introducimos el alfabeto del lenguaje formal y después presentaremos la definición de fórmula.

El alfabeto de un lenguaje L de la lógica proposicional consta de los siguientes símbolos:

1. LETRAS PROPOSICIONALES. El número de letras proposicionales puede variar de un lenguaje a otro. En lo sucesivo, supondremos que las letras proposicionales del lenguaje se encuentran entre las letras «p», «q», «r», «s» y «t» (con o sin subíndices).
2. CONECTIVAS : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.
3. PARÉNTESIS.

Las conectivas son los **símbolos lógicos** del lenguaje y los paréntesis los **símbolos auxiliares**. La negación es una conectiva monaria y las restantes son binarias. El nombre de las conectivas y la forma de leerlas puede verse en la siguiente tabla:

conectiva	nombre	lectura
$\neg$	negación	no
$\wedge$	conjunción	y
$\vee$	disyunción	o
$\rightarrow$	condicional	si..., entonces
$\leftrightarrow$	bicondicional	si y sólo si

Es importante observar que los símbolos del lenguaje son adecuados para representar la estructura de los enunciados que aparecen en los argumentos que nos interesa estudiar. Las letras proposicionales representan enunciados simples (o mejor, no analizados), las conectivas tienen una función sintáctica similar a la de las correspondientes partículas del lenguaje natural y, lo mismo que hacemos en ocasiones con los signos de puntuación del lenguaje, usamos los símbolos auxiliares para eliminar ambigüedades sintácticas.

Una **fórmula** de un lenguaje proposicional L o, simplemente, una fórmula es una sucesión de símbolos generada por un número finito de aplicaciones de las siguientes reglas:

1. Toda letra proposicional de L es una fórmula.
2. Si α es una fórmula, $\neg\alpha$ es una fórmula.
3. Si α y β son fórmulas, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$ y $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ son fórmulas.

La tercera cláusula contiene en rigor cuatro reglas de formación (una por cada una de las conectivas). Hemos incluido las cuatro reglas en una sola cláusula para abreviar la formulación.

Las siguientes sucesiones de símbolos son ejemplos de fórmulas, esto es, de expresiones correctamente formadas:

$$p, \qquad \neg(\neg p\wedge\neg q),$$
$$(p\rightarrow q), \qquad (p\wedge(q\wedge r)),$$
$$\neg\neg\neg p, \qquad (\neg\neg p\wedge(\neg p\vee q)).$$

Las letras proposicionales son **fórmulas atómicas** y todas las restantes son **fórmulas compuestas**. Cada fórmula compuesta tiene una **conectiva principal**, aquella que introduce la última regla que se aplica al construir la fórmula. La conectiva principal de $\neg\alpha$ es la negación, y si $*$ es una conectiva distinta de la negación, entonces $*$ es la conectiva principal de $(\alpha*\beta)$. Es habitual referirse genéricamente a las fórmulas que tienen la misma conectiva principal con el nombre de dicha conectiva. Así, una fórmula de la forma $\neg\alpha$ es una negación, una de la forma $(\alpha\wedge\beta)$ es una conjunción, etc. En un condicional $(\alpha\rightarrow\beta)$ decimos que α es el *antecedente* y que β es el *consecuente*. Por ejemplo, las cuatro fórmulas siguientes son disyunciones, esto es, fórmulas de la forma $(\alpha\vee\beta)$:

$$(p\vee q), \qquad ((p\rightarrow q)\vee(r\wedge s)),$$
$$(\neg p\vee(q\vee r)), \qquad (\neg\neg p\vee(r\leftrightarrow\neg s)).$$

La definición de fórmula consta de un número finito de reglas que, exceptuando la primera, se aplican a fórmulas, esto es, a resultados de aplicaciones anteriores de las propias reglas. La idea se entiende con facilidad si pensamos en el proceso de construcción de alguna fórmula sencilla, pero no excesivamente elemental. La fórmula

$$\neg(\neg p\wedge(q\vee r)),$$

por ejemplo, se obtiene aplicando (2) a

$$(\neg p \wedge (q \vee r))$$

que es el resultado de una aplicación anterior de (3) a dos fórmulas, $\neg p$ y $(q \vee r)$, que a su vez han sido obtenidas aplicando antes (2) y (3), respectivamente. No es difícil ver que un número finito de reglas de este tipo son capaces de generar un conjunto infinito de expresiones finitas a partir de un conjunto finito de símbolos. Esta característica de las reglas tiene una consecuencia importante: el número de fórmulas del lenguaje será infinito incluso en el caso de que en su alfabeto sólo haya un número finito de letras proposicionales. Obsérvese además que, al igual que los enunciados del lenguaje natural, las fórmulas son sucesiones finitas de símbolos, es decir, no hay fórmulas de longitud infinita.

Consideraciones sintácticas

El proceso de generación de las fórmulas de la lógica proposicional (y, en general, de los lenguajes formales) tiene una propiedad muy importante: ninguna fórmula puede ser generada de dos formas distintas. Dicho con más precisión, las reglas de construcción de fórmulas cumplen las dos condiciones siguientes:

1. si aplicamos una misma regla a fórmulas distintas obtendremos fórmulas distintas,
2. ninguna fórmula puede obtenerse aplicando reglas diferentes.

Para comprender los problemas en que nos veríamos envueltos si no se cumpliesen (1) y (2), imaginemos que hubiéramos formulado la regla (3) sin paréntesis:

3*. Si α y β son fórmulas, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son fórmulas.

Observemos que en tal caso no se cumpliría ninguna de las dos condiciones. Por un lado, la expresión $q \wedge p \rightarrow p$ podría obtenerse aplicando la misma regla a dos fórmulas distintas. En efecto:

(a) p y q son fórmulas, por la regla (1);
(b) $p \rightarrow p$ es una fórmula, por la regla (3*);
(c) $q \wedge p$ es una fórmula, por la regla (3*);
(d) $q \wedge p \rightarrow p$ es una fórmula, por la regla (3*) aplicada a q y a $p \rightarrow p$;
(e) $q \wedge p \rightarrow p$ es una fórmula, por la regla (3*) aplicada a $q \wedge p$ y a p.

Tampoco se cumpliría la segunda condición, pues la expresión $\neg p \vee p$ podría obtenerse aplicando reglas diferentes. Veamos cómo:

1: (a) p es una fórmula, por la regla (1);
(b) $\neg p$ es una fórmula, por la regla (2);
(c) $\neg p \vee p$ es una fórmula, por la regla (3*).

2: (a) p es una fórmula, por la regla (1);
(b) $p \vee p$ es una fórmula, por la regla (3*);
(c) $\neg p \vee p$ es una fórmula, por la regla (2).

El problema con las expresiones que pueden generarse de dos formas distintas es que resultan sintácticamente ambiguas porque admiten lecturas distintas no equivalentes. Éste es el problema que plantean las expresiones $q \wedge p \rightarrow p$ y $\neg p \vee p$. Si construimos $q \wedge p \rightarrow p$ aplicando (d), entonces la conectiva principal es la conjunción y, por tanto, su estructura sintáctica es la de $(q \wedge (p \rightarrow p))$; si la construimos aplicando (e), entonces la conectiva principal es el condicional y, por tanto, tiene la misma estructura sintáctica que $((q \wedge p) \rightarrow p)$. Algo análogo sucede con $\neg p \vee p$. Si la consideramos construida del primer modo, su estructura es la de una disyunción; si la consideramos construida del segundo modo, entonces la conectiva principal es la negación y su estructura sintáctica es la de la fórmula $\neg(p \vee p)$.

Como vemos, la función de los paréntesis que introduce la regla (3) de construcción de fórmulas es precisamente evitar las ambigüedades sintácticas o, dicho con otras palabras, evitar que una misma fórmula pueda generarse de dos formas distintas. En general, las condiciones (1) y (2) que hemos formulado al comienzo de esta subsección son esenciales para evitar que se generen expresiones sintácticamente ambiguas y, en nuestro caso, son los paréntesis introducidos por la regla (3) los que garantizan el cumplimiento de estas condiciones. Más adelante veremos que la ausencia de ambigüedad es imprescindible para definir los conceptos semánticos.

Lenguaje objeto y metalenguaje

Siempre que hablamos de un lenguaje, tanto si se trata de un lenguaje formal como de un lenguaje natural, se puede distinguir entre el lenguaje *del* que se habla y el lenguaje *en* el que se habla. Al primero se le llama **lenguaje objeto** y al segundo **metalenguaje**. Si, por ejemplo, explicamos castellano en inglés, el lenguaje objeto es el castellano y el metalenguaje es el inglés. Un lenguaje puede ser al mismo tiempo lenguaje objeto y metalenguaje. Esto es lo que sucede, por ejemplo, cuando usamos un idioma para explicar la gramática del mismo idioma. Es importante observar que los conceptos de lenguaje objeto y metalenguaje son relativos a una situación. Un lenguaje puede ser lenguaje objeto en una situación y metalenguaje en otra, dependiendo de si hablamos de él o de si lo usamos para hablar de algún lenguaje.

En la presentación de un lenguaje formal, el lenguaje objeto es, por supuesto, el lenguaje formal del que se habla y el metalenguaje es el idioma que usamos para describirlo y explicar las relaciones que se dan entre sus fórmulas. En el caso de este libro, el metalenguaje es, obviamente, el castellano (ampliado con ciertos signos y cierta terminología técnica). Los únicos símbolos del lenguaje formal (esto es, del lenguaje objeto) son los que figuran en su alfabeto y las únicas expresiones sintácticamente correctas de este lenguaje son las fórmulas. Así, por ejemplo, los enunciados

si α y β son fórmulas, $\alpha \wedge \beta$ es una conjunción,
si α es una fórmula, $\neg\alpha$ es una fórmula,

pertenecen al metalenguaje. Las variables α y β que intervienen en estos enunciados y que utilizamos constantemente para hablar de fórmulas son variables *metalingüísticas*, es decir, variables que pertenecen al mentalenguaje (pero no al lenguaje formal).

Para hablar de un objeto en un lenguaje determinado usamos el nombre o uno de los nombres (en caso de que tenga más de uno) que el objeto tiene en ese lenguaje. También podemos hablar de un objeto con la ayuda de una expresión que lo describe inequívocamente, pero este aspecto carece ahora de importancia. El problema que se nos plantea cuando deseamos hablar de un objeto como, por ejemplo, una palabra o un enunciado es ¿cuál es el nombre de un objeto lingüístico? Según la convención usual, el nombre de una expresión del lenguaje natural se forma entrecomillando la expresión misma. Obsérvese, por ejemplo, que no son necesarias las comillas en los enunciados

Napoleón fue derrotado en Waterloo,
3 no es la mitad de 23,
es verdad que J. Brahms nació en Hamburgo

pero, en cambio, son necesarias en los tres siguientes:

«Napoleón» acaba con la letra «n»,
«3» es la mitad derecha de «23»,
«J. Brahms nació en Hamburgo» es un enunciado verdadero.

Los símbolos y las fórmulas de un lenguaje formal son también entidades de tipo lingüístico, pero en este caso podemos adoptar una convención diferente sobre la formación de los nombres que evita el uso constante de comillas. En el caso de los lenguajes formales, como nombre en el metalenguaje de un símbolo tomamos el símbolo mismo y, en general, como nombre de una expresión tomamos la expresión misma. De hecho, esta convención es la que venimos utilizado desde el comienzo. Así, por ejemplo, en lugar de escribir,

«$\wedge$» es una conectiva,
«$p \wedge q$» es una fórmula,

escribimos simplemente

$\wedge$ es una conectiva,
$p \wedge q$ es una fórmula.

Es importante observar que los enunciados de este tipo pertenecen al metalenguaje y que son fieles a la regla de que para hablar de un objeto usamos su nombre precisamente porque hemos identificado las expresiones del lenguaje formal con sus nombres metalingüísticos.

Inducción

En el capítulo 5 de teoría de conjuntos hemos visto que los números naturales se generan a partir del número *cero* aplicando repetidamente la operación *sucesor*. El caso de las fórmulas de un lenguaje proposicional es similar al de los números naturales. Si L es un lenguaje proposicional y P el conjunto de letras proposicionales de L, el conjunto $\mathcal{F}$ de fórmulas de L es el conjunto de expresiones generadas a partir de P por las reglas (2) y (3) de la definición de fórmula. Vamos a introducir una definición preliminar que nos ayudará a caracterizar de un modo más preciso el conjunto $\mathcal{F}$.

Un conjunto C de expresiones de L *está cerrado respecto a las reglas de generación de fórmulas* si y sólo si

1. si $\alpha \in C$, entonces $\neg\alpha \in C$,
2. si $\alpha \in C$ y $\beta \in C$, entonces $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ y $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ pertenecen a C.

El conjunto $\mathcal{F}$ de fórmulas de L puede caracterizarse ahora como el único conjunto de expresiones que cumple:

1. $P \subseteq \mathcal{F}$ (es decir, todas las letras proposicionales de L pertenecen a $\mathcal{F}$),
2. $\mathcal{F}$ está cerrado respecto a las reglas de generación de fórmulas,
3. si $P \subseteq C$ y C está cerrado respecto a las reglas de generación de fórmulas, entonces $\mathcal{F} \subseteq C$.

Brevemente, el conjunto $\mathcal{F}$ es el menor conjunto de expresiones de L al que pertenecen todas las letras proposicionales y que está cerrado respecto a las reglas de generación de fórmulas.

La condición (3) es el *principio de inducción para fórmulas* y, como vamos a ver, es muy útil para demostrar enunciados generales sobre las fórmulas de L.

Supongamos que deseamos demostrar que todas las fórmulas de L tienen cierta propiedad $\mathcal{P}$. Sea C el conjunto

$$\{\alpha \in \mathcal{F} \mid \alpha \text{ tiene la propiedad } \mathcal{P}\},$$

esto es, C es el conjunto de fórmulas de L que tienen la propiedad $\mathcal{P}$. Es evidente que si $C = \mathcal{F}$, entonces todas las fórmulas de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$. Puesto que la inclusión $C \subseteq \mathcal{F}$ se cumple por definición, si mostramos que $P \subseteq C$ y que C está cerrado respecto a las reglas de generación, habremos demostrado que $\mathcal{F} \subseteq C$ y, por tanto, que $C = \mathcal{F}$. Si observamos ahora que

$$\alpha \in C \text{ sii } \alpha \text{ es una fórmula } L \text{ que tiene la propiedad } \mathcal{P},$$

podemos eliminar las referencias al conjunto C y reformular el principio de inducción de un modo más transparente como sigue:

PRIMER PRINCIPIO DE INDUCCIÓN PARA FÓRMULAS. *Si L es un lenguaje proposicional y*

1. *las letras proposicionales de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$,*
2. *si α es una fórmula que tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\neg\alpha$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$,*
3. *si α y β son fórmulas que tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\to\beta)$ y $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ tienen la propiedad $\mathcal{P}$,*

entonces todas las fórmulas de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

El principio de inducción completa para números naturales nos permite formular otro principio de inducción para fórmulas. Llamemos **grado** de una fórmula al número de sus símbolos lógicos (esto es, al número de sus conectivas). Por ejemplo, todas las letras proposicionales tienen grado 0, la fórmula $(\neg p\wedge q)$ tiene grado 2 y $\neg\neg\neg p$ tiene grado 3. El hecho de que el grado de las fórmulas sea un número natural nos permite demostrar que todas las fórmulas tienen cierta propiedad aplicando el principio de inducción completa para números naturales.

Como antes, imaginemos que deseamos demostrar que todas las fórmulas de L tienen cierta propiedad $\mathcal{P}$. Sea $\mathbb{X}$ el conjunto

$$\{n\in\mathbb{N} \mid \text{toda fórmula } \alpha \text{ de } L \text{ de grado } n \text{ tiene la propiedad } \mathcal{P}\},$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Observemos ahora que si $\mathbb{X}=\mathbb{N}$, entonces todas las fórmulas de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$. En efecto, si todo número natural pertenece a $\mathbb{X}$, entonces para todo n, todas las fórmulas de L de grado n tienen la propiedad $\mathcal{P}$, y esto equivale a decir que todas las fórmulas de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

Por el principio de inducción completa para números naturales, para demostrar que $\mathbb{X}=\mathbb{N}$ basta mostrar que para todo n,

$$\text{si para todo } m<n,\ m\in\mathbb{X}, \text{ entonces } n\in\mathbb{X}.$$

Si tenemos en cuenta que $n\in\mathbb{X}$ si y sólo si toda fórmula de grado n tiene la propiedad $\mathcal{P}$, podemos reformular esta aplicación del principio de inducción así:

si $\mathcal{P}$ es una propiedad tal que

($\diamond$) para todo n, si todas las fórmulas de grado menor que n tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces las fórmulas de grado n tienen la propiedad $\mathcal{P}$,

entonces todas las fórmulas de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

Éste es ya el segundo principio de inducción para fórmulas, pero también podemos darle una formulación un poco más transparente si observamos cómo justificamos ($\diamond$). Para demostrar ($\diamond$) suponemos que todas las fórmulas de grado menor que un número n cualquiera tienen la propiedad $\mathcal{P}$ y mostramos que las fórmulas de grado n tienen la propiedad $\mathcal{P}$. Distinguimos ahora dos casos. Si $n=0$, entonces las únicas fórmulas de grado n son las letras proposicionales, de modo que lo que debemos hacer para justificar ($\diamond$) en este caso es mostrar que las letras proposicionales de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$. Si $n>0$, entonces una fórmula de grado n será de la forma $\neg\alpha$ o de la forma $(\alpha*\beta)$, donde $*$ es una conectiva binaria; por tanto, para justificar ($\diamond$) en el caso $n>0$, lo que hacemos es demostrar que si las fórmulas de grado menor que $\neg\alpha$ tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\neg\alpha$ tiene la propied ad $\mathcal{P}$, y que si las fórmulas de grado menor que $(\alpha*\beta)$ tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $(\alpha*\beta)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Así, este principio de inducción puede formularse con todo rigor del siguiente modo:

SEGUNDO PRINCIPIO DE INDUCCIÓN PARA FÓRMULAS. *Si L es un lenguaje proposicional y*

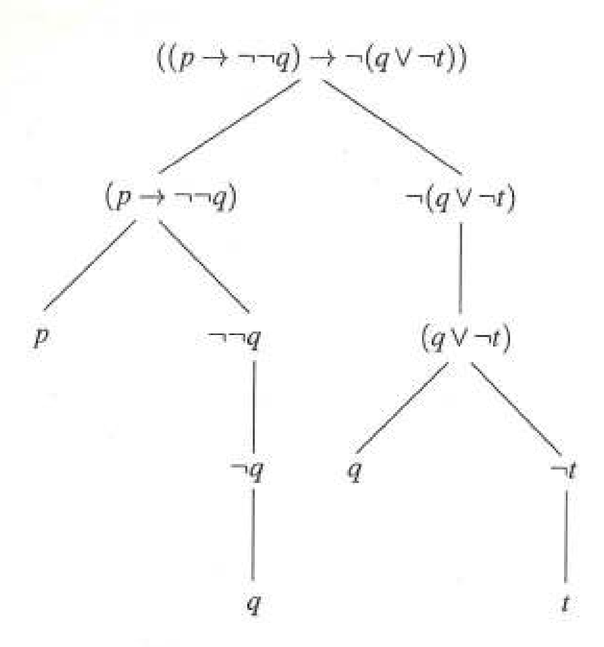
1. *las letras proposicionales de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$,*
2. *si las fórmulas de grado menor que $\neg\alpha$ tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\neg\alpha$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$,*
3. *si $*$ es una conectiva binaria y las fórmulas de grado menor que $(\alpha*\beta)$ tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $(\alpha*\beta)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$,*

entonces todas las fórmulas de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

Una *demostración por inducción* no es nada más que una demostración en la que se aplican los principios de inducción. En los próximos capítulos veremos varias demostraciones de este tipo.

3. Subfórmulas

Esencialmente, el *árbol genealógico* de una fórmula es una representación de su proceso de construcción. Cada fórmula compuesta se analiza en las fórmulas más simples que la componen, éstas se analizan del mismo modo y así sucesivamente hasta llegar a las letras proposicionales, que no son analizables en fórmulas más simples. Un ejemplo ayudará a entender la idea. El árbol de la fórmula $((p\to\neg\neg q)\to\neg(q\vee\neg t))$ es:



Las *subfórmulas* de una fórmula dada son todas las fórmulas que aparecen en su árbol de construcción (incluida ella misma). Las subfórmulas de

$$((p \to \neg\neg q) \to \neg(q \vee \neg t))$$

son ella misma y las siguientes:

$$(p \to \neg\neg q), \qquad \neg(q \vee \neg t), \qquad (q \vee \neg t),$$

$$p, \qquad \neg\neg q, \qquad \neg t,$$

$$\neg q, \qquad q, \qquad t.$$

El concepto de subfórmula se caracteriza con precisión así: las **subfórmulas de una fórmula** φ son todas las fórmulas generadas por las reglas siguientes:

1. Si φ es una letra proposicional, la única subfórmula de φ es ella misma.
2. Si $\varphi = \neg\alpha$, las subfórmulas de φ son φ más las subfórmulas de α.
3. Si $*$ es una conectiva binaria y $\varphi = (\alpha * \beta)$, las subfórmulas de φ son la misma φ más las subfórmulas de α y las subfórmulas de β.

No es difícil ver que, esencialmente, estas reglas no hacen otra cosa que describir el proceso de obtención del árbol genealógico de una fórmula y que, en definitiva, las subfórmulas de una fórmula φ son, simplemente, la misma φ y todas las fórmulas necesarias para generar φ.

Observemos finalmente que: 1) el hecho de considerar que toda fórmula es subfórmula de ella misma nos permite afirmar que no hay dos fórmulas distintas que tengan las mismas subfórmulas y 2) si una fórmula γ es una subfórmula de una fórmula β y ésta es una subfórmula de α, la fórmula γ también es una subfórmula de la fórmula α.

Omisión de paréntesis

En lo sucesivo haremos uso de la siguiente convención que permite abreviar la escritura de la mayoría de fórmulas: siempre que lo creamos conveniente, omitiremos los paréntesis exteriores de las fórmulas una vez construidas. Así, en lugar de escribir

$$((p \wedge q) \leftrightarrow \neg p)$$

podemos escribir

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p,$$

pero observemos que los paréntesis de $(p \wedge q)$ en la fórmula anterior no pueden omitirse porque no son exteriores. No debemos olvidar que las expresiones abreviadas no son en rigor fórmulas, son modos abreviados de referirnos a fórmulas. Así, aunque no escribamos los paréntesis exteriores, todas las fórmulas excepto las atómicas y las negaciones en realidad los llevan.

4. Ejercicios

1. Indique si las expresiones siguientes son fórmulas o son expresiones sintácticamente incorrectas. Resuelva el ejercicio sin aplicar la regla de omisión de paréntesis e indique qué expresiones resultan correctas cuando se aplica dicha regla. En los casos en que sea posible, añada o elimine paréntesis de las expresiones incorrectas para que resulte una fórmula.

   (a) $\neg(p)$,
   (b) $p \to q$,
   (c) $p \to p \to q$,
   (d) $\neg(\neg(p))$,
   (e) $\neg(\neg(p \wedge r))$,
   (f) $(\neg\neg(\neg p \wedge r))$,
   (g) $((\neg\neg q) \vee p)$,
   (h) $(p \wedge \neg p \vee q)$,
   (i) $(\neg p \leftrightarrow pq)$,
   (j) $(p \to (p \wedge r) \to q)$,
   (k) $(p \to (p \wedge r) \wedge (q \wedge q))$,
   (l) $((\neg p \vee q) \to \neg(\neg p \leftrightarrow q))$.

2. Añada paréntesis a la expresión

   $$\neg\neg p \wedge q \to r \vee \neg q$$

   de modo que resulte una fórmula cuya forma sea la que se indica a continuación (puede haber más de una respuesta correcta):

   (a) negación de un condicional,
   (b) negación de una disyunción,

(c) negación de una conjunción,
(d) negación de una negación,
(e) conjunción,
(f) condicional cuyo antecedente es una conjunción,
(g) condicional cuyo antecedente es una negación,
(h) disyunción de negaciones,
(i) disyunción de una conjunción y una negación,
(j) disyunción de un condicional y una negación.

3. Obtenga las subfórmulas de las siguientes fórmulas:

(a) $(p \to q) \vee (p \to r)$,
(b) $p \to ((q \vee p) \to r)$,
(c) $((p \to \neg r) \wedge \neg\neg(p \vee r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$,
(d) $(p \to \neg r) \wedge \neg(\neg(p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg q))$,
(e) $(\neg q \vee (p \to \neg r)) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$.

Capítulo 7

SEMÁNTICA DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

1. Verdad con una asignación

Una **asignación** es una función que asigna a cada una de las letras proposicionales del lenguaje el valor *verdadero* o el valor *falso*. A estos valores los llamamos **valores de verdad**. Para abreviar, nos referiremos a ellos con las letras «V» y «F», respectivamente, y diremos que una asignación atribuye o asigna a cada letra proposicional el valor V o el valor F. El modo de referirnos a los valores de verdad carece de importancia y, por ejemplo, es muy frecuente usar «1» en lugar de «V» y «0» en lugar de «F».

Para referirnos a las asignaciones usaremos la letra «v» (con subíndices, cuando sea necesario). La expresión

$$v(p) = V$$

significa entonces que la asignación v atribuye el valor V a la letra proposicional p o, dicho más informalmente, que p es verdadera con la asignación v. Si en lugar del valor V es el valor F, esto es, si $v(p) = F$, decimos que p es falsa con la asignación v.

Sólo hay dos ($= 2^1$) asignaciones en el caso de un lenguaje con una única letra proposicional: la que asigna a la letra el valor V y la que le asigna el valor F. El número de asignaciones para 2 letras proposicionales es 4 ($= 2^2$) debido a que una letra puede tomar dos valores por cada uno de los dos que toma la otra. Si añadimos una letra proposicional más, el número de asignaciones vuelve a duplicarse, porque la nueva letra puede tomar dos valores por cada una de las cuatro asignaciones correspondientes a las otras dos letras. Así, el número de asignaciones para 3 letras proposicionales es 2^3. En general, si el número de letras proposicionales es n, el número de asignaciones es 2^n.

Las asignaciones se representan en muchas ocasiones de la siguiente forma:

p	q	r	s
V	F	F	V

En la línea superior aparecen, como es obvio, las letras proposicionales y en la inferior los valores que la asignación atribuye a cada una de ellas. La asignación

de este ejemplo atribuye el valor V a la letra p, el valor F a la letra q, el valor F a la letra r y el valor V a la letra s.

Este recurso se usa también en el caso de varias asignaciones. Por ejemplo, las ocho (2^3) asignaciones existentes en el caso de tres únicas letras proposicionales (p, q y r) pueden (y suelen) listarse así:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

El orden de las asignaciones carece de importancia. Obsérvese, sin embargo, el modo de ordenación, que hace prácticamente imposible olvidarse de alguna.

El valor de verdad de una fórmula compuesta depende tanto del valor de verdad de las letras proposicionales que aparecen en ella como del significado de las conectivas. Desde el punto de vista de la lógica proposicional, el significado de una conectiva puede identificarse con una regla que determina un valor de verdad en función de otros valores de verdad. Consideremos, por ejemplo, el caso de la conjunción. El valor de verdad de $(\alpha \wedge \beta)$ depende exclusivamente de los valores de verdad de α y β. Esto significa que la verdad o falsedad de $(\alpha \wedge \beta)$ depende sólo de cuál de estas cuatro situaciones se da: que α y β sean ambas verdaderas, que α sea verdadera y β falsa, que α sea falsa y β verdadera y, por último, que α y β sean falsas. Todo lo que necesitamos saber sobre el significado de la conjunción es qué valor concreto toma $(\alpha \wedge \beta)$ en cada una de estas cuatro situaciones y precisamente esta información puede darse mediante una regla o mediante una **función veritativa**, esto es, una función que asigna valores de verdad a combinaciones de valores de verdad. Lo mismo sucede en el caso de las restantes conectivas.

El significado de las conectivas queda determinado por las siguientes tablas:

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

El modo de obtener las reglas a que hacíamos referencia a partir de las tablas es sencillo:

1. la negación de una fórmula es verdadera cuando la fórmula es falsa y falsa cuando la fórmula es verdadera;
2. una conjunción es verdadera cuando las dos fórmulas que la componen son verdaderas y falsa cuando alguna de las componentes lo es;
3. una disyunción es verdadera cuando al menos una de las fórmulas que la componen es verdadera y falsa cuando las dos fórmulas que la componen son falsas;
4. un condicional es verdadero cuando el antecedente es falso o el consecuente es verdadero, y es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso;
5. un bicondicional es verdadero cuando las dos fórmulas que lo componen toman el mismo valor de verdad y falso cuando las fórmulas que lo componen tienen distinto valor de verdad.

La relación que existe entre la semántica de las conectivas del lenguaje formal y el significado de las expresiones del lenguaje natural con que se corresponden la comentaremos más adelante.

Las condiciones de verdad de las conectivas (las reglas anteriores) junto con una asignación dada determinan un valor de verdad para cada fórmula del lenguaje. En otras palabras, dada una asignación v, toda fórmula α del lenguaje toma un único valor de verdad, al que nos referiremos con **el valor de verdad de α con la asignación** v, que está determinado por las condiciones de verdad de las conectivas. Un ejemplo nos ayudará a entender el modo de calcular el valor de verdad de una fórmula dada con una asignación dada.

Imaginemos que deseamos saber el valor de verdad que toma la fórmula

$$(r \vee q) \rightarrow \neg(r \rightarrow p)$$

con una asignación v tal que:

$$v(p) = V, \qquad v(q) = F \qquad \text{y} \qquad v(r) = F.$$

Lo primero que debemos hacer es analizar la fórmula y obtener sus subfórmulas. Este paso es fundamental, porque el valor de verdad que toma una fórmula compuesta depende de los valores de verdad que toman las fórmulas más simples que la componen. Aplicado a nuestro ejemplo, esto significa que:

1. el valor de $(r \vee q) \rightarrow \neg(r \rightarrow p)$ depende de los valores de $(r \vee q)$ y $\neg(r \rightarrow p)$;
2. el valor de $(r \vee q)$ depende de los valores de r y de q;
3. el valor de $\neg(r \rightarrow p)$ depende del valor de $(r \rightarrow p)$;
4. el valor de $(r \rightarrow p)$ depende de los valores de r y de p.

Si observamos este análisis, veremos que básicamente reproduce el que hacemos cuando obtenemos el árbol genealógico de la fórmula. Ahora, para calcular su valor de verdad procedemos a la inversa, es decir, usamos los valores de las fórmulas más simples para obtener los valores de las más complejas:

1. $(r \to p)$ es verdadera (toma el valor V), puesto que r es falsa y p verdadera;
2. $\neg(r \to p)$ es falsa (toma el valor F), puesto que $(r \to p)$ es verdadera;
3. $(r \vee q)$ es falsa, ya que r y q son ambas falsas;
4. $(r \vee q) \to \neg(r \to p)$ es verdadera porque tanto el antecedente como el consecuentes son falsos.

(Debe entenderse que las expresiones «es verdadera» y «es falsa» son abreviaturas de «toma el valor V con la asignación v» y «toma el valor F con la asignación v», respectivamente.)

La siguiente tabla resume el procedimiento que hemos seguido y es uno de los modos en que suelen presentarse este tipo de cálculos:

p q r	$(r \vee q)$	$(r \to p)$	$\neg(r \to p)$	$(r \vee q) \to \neg(r \to p)$
V F F	F	V	F	V

En la linea superior hemos escrito la descomposición de la fórmula en sus subfórmulas. Debajo de las letras proposicionales figuran los valores de verdad que les atribuye la asignación y debajo de cada una de las fórmulas compuestas su valor de verdad, calculado del modo que hemos explicado. Como indica la tabla, la fórmula $(r \vee q) \to \neg(r \to p)$ es verdadera (toma el valor V) con la asignación v. Por lo que explicaremos a continuación, es importante observar que no decimos que v asigna un valor a la fórmula, sino que la fórmula toma un valor con la asignación v.

Una asignación determina el valor de verdad de todas las fórmulas del lenguaje, pero, en sentido estricto, no atribuye valores de verdad a todas ellas. Como sabemos, una asignación es una función cuyo dominio es el conjunto de las letras proposicionales y, por tanto, sólo a estas fórmulas les asigna un valor de verdad. Ahora bien, desde el momento en que fijamos una asignación, los valores de verdad de todas las fórmulas del lenguaje quedan completamente determinados. Sin duda, el ejemplo anterior nos puede ayudar a convencernos de este hecho, pero un ejemplo no es una demostración. El siguiente argumento generaliza las ideas básicas del ejemplo y, sin llegar a serlo, se acerca mucho más a lo que sería una demostración.

En la determinación del valor de verdad de una fórmula intervienen tres componentes: la estructura sintáctica de la propia fórmula, las condiciones de verdad de las conectivas y la asignación. Una condición necesaria para que el valor de verdad de una fórmula esté determinado es que la estructura de la fórmula lo esté. Si no lo estuviera, es decir, si alguna fórmula tuviera más de una lectura (lo que sucedería, por ejemplo, si alguna pudiera considerarse como un condicional y al mismo tiempo como una conjunción), entonces el valor de verdad de estas fórmulas dependería del modo en que las leyéramos. La ausencia de ambigüedad sintáctica de las fórmulas es una condición necesaria para que su valor de verdad esté determinado. El valor de verdad de las fórmulas depende también de las condiciones de verdad de las conectivas. Si, por ejemplo, modificamos las condiciones de verdad del condicional de modo que sean falsos aquellos que tienen antecedente falso y consecuente verdadero, el valor de verdad de muchos condicionales cambiará. Ahora bien, estos dos componentes de los que depende la determinación de los valores de verdad de una fórmula han sido fijados de antemano. Por un lado, la lectura única de las fórmulas está garantizada por las reglas de construcción del lenguaje. Por otro lado, las condiciones de verdad de las conectivas ya han sido fijadas al comienzo de esta sección. De este modo, cuando fijamos la asignación, todos los componentes que intervienen en la determinación del valor de verdad de una fórmula quedan fijados y, por tanto, el valor de verdad de todas las fórmulas del lenguaje queda completamente determinado.

Es posible extender una asignación dada a una función que asigne a cada una de las fórmulas del lenguaje el valor de verdad determinado por dicha asignación. Así, si v es una asignación y α y β son fórmulas, definimos una función $\overline{v}$ (la extensión de v) del siguiente modo:

1. $\overline{v}(p) = v(p)$, para toda letra proposicional p;
2. $\overline{v}(\neg\alpha) = V$ sii $\overline{v}(\alpha) = F$;
3. $\overline{v}(\alpha \wedge \beta) = V$ sii $\overline{v}(\alpha) = V$ y $\overline{v}(\beta) = V$;
4. $\overline{v}(\alpha \vee \beta) = V$ sii $\overline{v}(\alpha) = V$ o $\overline{v}(\beta) = V$;
5. $\overline{v}(\alpha \to \beta) = V$ sii $\overline{v}(\alpha) = F$ o $\overline{v}(\beta) = V$;
6. $\overline{v}(\alpha \leftrightarrow \beta) = V$ sii $\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$.

Si v es una asignación, la igualdad

$$\overline{v}(\alpha) = V$$

significa que α toma el el valor V con la extensión de la asignación v o, dicho en la terminología que venimos usando, que v hace verdadera a α o que α es verdadera con la asignación v. Naturalmente, si

$$\overline{v}(\alpha) = F$$

diremos que v hace falsa a α o que α es falsa con la asignación v. En lo sucesivo, simplificaremos la notación usando la misma letra para la asignación y para su extensión y escribiremos «$v(\alpha)$» en lugar de «$\overline{v}(\alpha)$». Esta simplificación introduce cierta ambigüedad notacional, pero no puede derivarse de ella ningún malentendido. Si α es una fórmula compuesta, $v(\alpha)$ no puede ser otra cosa que el valor de verdad que la extensión de v asigna a α, ya que las asignaciones no atribuyen valores de verdad a las fórmulas compuestas. Si α es una letra proposicional, $v(\alpha)$ puede ser tanto el valor que v asigna a α como el valor que la extensión de v asigna a α, pero este detalle carece de importancia porque

ambos valores coinciden (esto es precisamente lo que afirma la primera cláusula de la defnción de $\overline{v}$).

2. Tautologías y contradicciones

Una **tautología** es una fórmula tal que toda asignación la hace verdadera; una **contradicción** es una fórmula tal que toda asignación la hace falsa; una fórmula **contingente** es una fórmula para la que hay alguna asignación que la hace verdadera y alguna asignación que la hace falsa. Estas definiciones pueden enunciarse algo más formalmente del siguiente modo:

1. una fórmula α es una *tautología* sii para toda asignación v, $v(\alpha) = V$;
2. una fórmula α es una *contradicción* sii para toda asignación v, $v(\alpha) = F$;
3. una fórmula α es *contingente* sii hay alguna asignación v tal que $v(\alpha) = V$ y hay alguna asignación v tal que $v(\alpha) = F$.

EJEMPLOS

1. La fórmula
$$(p \wedge q) \rightarrow p$$
es una tautología. Veámoslo. Sea v una asignación cualquiera. Si $v(p) = V$, el consecuente es verdadero con la asignación v; si $v(p) = F$, entonces v hace falso al antecedente. Puesto que en ambos casos v hace verdadero condicional y v es una asignación cualquiera, concluimos que toda asignación lo hace verdadero. El mismo razonamiento nos permite concluir que
$$p \rightarrow (p \vee q)$$
también es una tautología.
2. Las fórmulas
$$p \wedge \neg p,$$
$$p \leftrightarrow \neg p,$$
$$(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \vee q)$$
son contradicciones. Es obvio que las dos primeras son falsas tanto si p toma el valor V como si toma el valor F. La última fórmula no puede ser nunca verdadera, ya que las fórmulas que componen el bicondicional no pueden tomar el mismo valor de verdad: la única asignación que hace verdadera a $(\neg p \wedge \neg q)$ es la que atribuye el valor F tanto a p como a q, y precisamente esta asignación es la única que hace falsa a $(p \vee q)$.

3. La fórmula
$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$$
es contingente: es verdadera con la asignación que atribuye a p el valor V y a q el valor F, y es falsa con las restantes asignaciones.

PROPOSICIÓN 7.1.

(1) *Toda fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula contingente.*

(2) *La negación de una tautología es una contradicción.*

(3) *La negación de una contradicción es una tautología.*

(4) *La negación de una fórmula contingente es una fórmula contingente.*

DEMOSTRACIÓN. La primera observación es una consecuencia inmediata de las definiciones de los tres conceptos. La justificación de la segunda es análoga a la de la tercera. Justificaremos sólo (3) y (4).

(3) Si α es una contradicción, entonces toda asignación la hace falsa; así, toda asignación hace verdadera $\neg\alpha$ y, por tanto, $\neg\alpha$ es una tautología.

(4) Si α es una fórmula contingente, entonces hay alguna asignación que la hace verdadera y alguna asignación que la hace falsa. Es evidente entonces que existen asignaciones que hacen falsa a $\neg\alpha$ (precisamente las que hacen verdadera a α) y también asignaciones que hacen verdadera a $\neg\alpha$ (las que hacen falsa a α). Así, $\neg\alpha$ es contingente. □

SELECCIÓN DE TAUTOLOGÍAS

La siguiente lista contiene alguna de las tautologías cuyo interés ha merecido que se les diera un nombre. Hay otras dignas de figurar en la lista, pero la mayor parte de éstas deberemos mencionarlas en la sección que dedicamos al concepto de equivalencia lógica y por eso las omitimos ahora.

1. $\alpha \rightarrow \alpha$ (ley de identidad).
2. $\alpha \vee \neg\alpha$ (ley del tercio excluso).
3. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (principio de no contradicción).
4. $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (ley de Clavius).
5. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (ley de Duns Scoto).
6. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (ley de Peirce).
7. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$ (Modus ponens).
8. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ (Modus tollens).

La justificación de las cinco primeras es inmediata y (8) se justifica de modo análogo a (7). Justificaremos (6) y (7).

(6) Supongamos que v es una asignación cualquiera y veamos que

$$(*) \qquad v(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha) = V.$$

Existe dos posibilidades: $v(\alpha) = V$ o $v(\alpha) = F$. Si $v(\alpha) = V$, entonces se cumple (∗), pues v hace verdadero al condicional. Si $v(\alpha) = F$, entonces $v(\alpha \to \beta) = V$; por tanto, $v((\alpha \to \beta) \to \alpha)) = F$ y, de nuevo, se cumple (∗), pues ahora v hace falso al antecente del condicional. Puesto que necesariamente $v(\alpha) = V$ o $v(\alpha) = F$ y en ambos casos se cumple (∗), concluimos que (∗).

(7) Mostraremos que las asignaciones que hacen verdadero al antecedente también hacen verdadero al consecuente. Si es v es una asignación tal que

$$v((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) = V,$$

entonces $v(\alpha) = V$ y $v(\alpha \to \beta) = V$; por tanto $v(\beta) = V$. Esto muestra que no hay asignaciones que hagan verdadero al antecedente y falso al consecuente del condicional $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$, es decir, que no hay asignaciones que hagan falso a este condicional y, en consecuencia, que es una tautología. □

Todas las fórmulas de la lista anterior son, en rigor, esquemas de tautologías. Los esquemas representan estructuras o formas lógicas que dan lugar a fórmulas concretas cuando se sustituyen todas sus variables por fórmulas concretas (una variable debe sustituirse por una sóla fórmula, pero dos o más variables distintas pueden sustituirse por una misma fórmula). El resultado de cada una de las posibles sustituciones es una fórmula que tiene la estructura del esquema usado para obtenerla. Cuando decimos de estas fórmulas esquemáticas (o esquemas) que son tautologías o contradicciones, lo que queremos decir es que toda posible sustitución de sus variables da lugar a una tautología o, respectivamente, a una contradicción. Por ejemplo, las fórmulas

$$p \vee \neg p\,,$$

$$(p \to q) \vee \neg(p \to q)\,,$$

$$\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$$

son tautologías que se obtienen de las leyes anteriores. Las dos primeras son casos particulares de la ley del tercio excluso: la primera resulta de sustituir α por p y la segunda de sustituir α por $(p \to q)$. La tercera resulta de sustituir α por $\neg p$ en el principio de no contradicción.

3. Tablas de verdad

Existe un procedimiento mecánico que nos permite decidir en un número finito de pasos si una fórmula dada es una tautología, una contradicción o una fórmula contingente. Este procedimiento es el llamado *método de las tablas de verdad* y consiste esencialmente en calcular el valor de verdad que toma la fórmula dada con cada asignación. Antes de describir con más detalle este método tenemos que enfrentarnos a un pequeño problema técnico. La primera pregunta a la que debe responderse cuando se desea aplicar el método de las tablas de verdad a una fórmula dada es ¿qué asignaciones deben tomarse en consideración? Para ver por qué esta pregunta plantea un problema es necesario recordar que, por definición, una asignación es una función que asigna valores de verdad a todas las letras proposicionales del lenguaje considerado y no sólo a las que aparecen en una fórmula dada. Supongamos, por ejemplo, que deseamos calcular de modo sistemático el valor de verdad que toma una fórmula α que sólo tiene tres letras proposicionales con cada una de las asignaciones posibles. Si las únicas letras del lenguaje son las que aparecen en α, entonces sólo hay ocho asignaciones, pero si α pertenece a un lenguaje que tiene, digamos, 5 letras proposicionales (aunque dos de ellas no aparezcan en α), entonces hay 32 (2^5) asignaciones. Por otro lado, es intuitivamente claro que para conocer el valor que toma α con las 32 asignaciones basta con calcular el valor que toma con las 8 posibles atribuciones de valores de verdad a las 3 letras que aparecen en ella, ya que α tomará el mismo valor de verdad con todas las asignaciones que sólo se diferencien en los valores atribuidos a las letras que no aparecen en ella. Este hecho, que ya habíamos utilizado, es el que establece la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 7.2. *Si v_1 y v_2 son dos asignaciones que coinciden en los valores de verdad que asignan a las letras proposicionales de una fórmula φ, entonces $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a justificar esta proposición con ayuda del primer principio de inducción para fórmulas. Con el propósito de facilitar la comprensión del argumento, volveremos a distinguir notacionalmente entre una asignación y su extensión. La propiedad $\mathcal{P}$ que deseamos mostrar que cumple toda fórmula φ es: si v_1 y v_2 son dos asignaciones que coinciden en los valores de verdad que asignan a las letras proposicionales de φ, entonces $\overline{v}_1(\varphi) = \overline{v}_2(\varphi)$. Recordemos que, según el principio de inducción, para justificar que toda fórmula tiene la propiedad $\mathcal{P}$ basta mostrar que 1) toda letra proposicional tiene la propiedad $\mathcal{P}$, 2) si α tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\neg\alpha$ también la tiene, y 3) si φ es de la forma $(\alpha * \beta)$ (donde $*$ es una conectiva binaria) y α y β tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $(\alpha * \beta)$ también la tiene. Veamos ahora que se cumplen estas tres condiciones:

1) Si p es una letra proposicional cualquiera, y v_1 y v_2 coinciden en el valor de verdad que asignan a p, es obvio que $\overline{v}_1(p) = \overline{v}_2(p)$.

2) Supongamos que α tiene la propiedad $\mathcal{P}$ (hipótesis inductiva) y veamos que $\neg\alpha$ también la tiene, esto es, que si v_1 y v_2 coinciden en los valores que asignan a las letras proposicionales de $\neg\alpha$, entonces $\overline{v}_1(\neg\alpha) = \overline{v}_2(\neg\alpha)$. Para

demostrar esto, suponemos que v_1 y v_2 coinciden en los valores que asignan a las letras de $\neg\alpha$. Puesto que α tiene las mismas letras proposicionales que $\neg\alpha$, v_1 y v_2 coinciden también en los valores que asignan a las letras de α, lo cual implica, por la hipótesis inductiva, que $\bar{v}_1(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha)$. Así,

$$\begin{array}{llll} \bar{v}_1(\neg\alpha) = V & \text{sii} & \bar{v}_1(\alpha) = F & \text{por definición de } \bar{v}, \\ & \text{sii} & \bar{v}_2(\alpha) = F & \text{por hipótesis inductiva,} \\ & \text{sii} & \bar{v}_2(\neg\alpha) = V & \text{por definición } \bar{v}. \end{array}$$

Esto muestra que $\bar{v}_1(\neg\alpha) = \bar{v}_2(\neg\alpha)$.

3) La demostración es básicamente la misma para todas las conectivas binarias, de modo que la haremos sólo para el caso de la conjunción. Supongamos que α y β tienen la propiedad $\mathcal{P}$ (hipótesis inductiva) y veamos que $(\alpha \wedge \beta)$ también la tiene, esto es, que si v_1 y v_2 coinciden en los valores que asignan a las letras proposicionales de $\alpha \wedge \beta$, entonces $\bar{v}_1(\alpha \wedge \beta) = \bar{v}_2(\alpha \wedge \beta)$. Para demostrar esto último, suponemos que v_1 y v_2 coinciden en los valores que asignan a las letras de $\alpha \wedge \beta$. Ahora, es evidente que v_1 y v_2 coinciden también en los valores que asignan a las letras de α y de β consideradas por separado. Podemos aplicar entonces la hipótesis inductiva para concluir que $\bar{v}_1(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha)$ y $\bar{v}_1(\beta) = \bar{v}_2(\beta)$. Así,

$$\begin{array}{llll} \bar{v}_1(\alpha \wedge \beta) = V & \text{sii} & \bar{v}_1(\alpha) = V \text{ y } \bar{v}_1(\beta) = V & \text{por definición de } \bar{v}, \\ & \text{sii} & \bar{v}_2(\alpha) = V \text{ y } \bar{v}_2(\beta) = V & \text{por hipótesis inductiva,} \\ & \text{sii} & \bar{v}_2(\alpha \wedge \beta) = V & \text{por definición } \bar{v}. \end{array}$$

Esto muestra que $\bar{v}_1(\alpha \wedge \beta) = \bar{v}_2(\alpha \wedge \beta)$.

El primer principio de inducción para fórmulas nos permite ahora concluir que para toda fórmula φ, si v_1 y v_2 son dos asignaciones que coinciden en los valores de verdad que asignan a las letras proposicionales de φ, entonces $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$. □

La proposición que acabamos de justificar nos permite identificar para ciertos propósitos el concepto de asignación con el de atribución de valores de verdad a las letras proposicionales que aparecen en la fórmula o fórmulas que en ese momento se están tomando en consideración. Un caso particular en que se aplica esta proposición es el método de decisión de las tablas de verdad. Para decidir si una fórmula dada es una tautología, una contradicción o una fórmula contingente basta considerar todas las posibles atribuciones de valores de verdad a las letras proposicionales que aparecen en la fórmula y calcular, del modo que ya hemos explicado, el valor de verdad que toma la fórmula con cada una de ellas. Este procedimiento de decisión es puramente mecánico y concluye siempre en un número finito de pasos, puesto que tanto el número de subfórmulas de una fórmula cualquiera como el número de atribuciones posibles de valores de verdad a las letras que aparecen en ella es finito. La

tabla de verdad de la fórmula

$$(r \vee q) \rightarrow \neg(r \rightarrow p)$$

que nos ha servido de ejemplo en la sección 7.1 es:

p	q	r	$r \vee q$	$r \rightarrow p$	$\neg(r \rightarrow p)$	$(r \vee q) \rightarrow \neg(r \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V

Como se ve en su tabla de verdad, se trata de una fórmula contingente puesto que es verdadera con algunas asignaciones y falsa con otras.

Estrictamente hablando, la **tabla de verdad de una fórmula** consta sólo de las columnas correspondientes a las asignaciones y de la columna final donde figura el valor de verdad que toma la fórmula con cada una de las asignaciones. En nuestro ejemplo de tabla de verdad hemos seguido la práctica usual de incluir también las columnas donde figuran los cálculos intermedios con el propósito de facilitar la comprensión del modo en que se obtienen los valores finales.

El método de las tablas de verdad es efectivo, pero es tedioso y muy poco eficiente. Vamos a mostrar con un par de ejemplos un modo de razonar que no es puramente mécanico, pero nos permite llegar a una conclusión con más rapidez y eficiencia que usando las tablas de verdad. Aunque ya sepamos la respuesta, tiene intererés que mostremos cómo razonaríamos si deseáramos saber sin hacer la tabla de verdad qué tipo de fórmula es el condicional del ejemplo anterior. Por un lado, no es una contradicción, porque cualquier asignación que haga falso al antecedente hará verdadero al condicional; esto es, si $v(r) = F$ y $v(q) = F$, entonces v hace verdadero al condicional. Por otro lado, no es una tautología, pues el condicional puede ser falso; para que una asignación v lo haga falso debe hacer verdadero al antecedente y falso al consecuente; es decir, v debe cumplir que

$$v(r \vee q) = V \qquad \text{y} \qquad v(r \rightarrow p) = V;$$

pero es evidente que toda asignación que, por ejemplo, haga verdaderas a r y a p cumple estas condiciones; así, estas asignaciones, entre otras, hacen falso al condicional. Concluimos, por tanto, que se trata de una fórmula contingente.

Mostraremos ahora que el condicional

$$\neg(r \to p) \to (r \vee q)$$

es una tautología. Supongamos que no lo es. Si v es una asignación que lo hace falso, entonces

$$v(\neg(r \to p)) = V \qquad \text{y} \qquad v(r \vee p) = F;$$

si $v(r \vee p) = F$, entonces $v(r) = F$ y $v(q) = F$; pero en este caso $v(r \to p) = V$ y es imposible que $v(\neg(r \to p)) = V$; esto muestra que no existe ninguna asignación que haga falso a este condicional; concluimos, por tanto, que es una tautología.

4. Ejercicios

1. Clasifique las siguientes fórmulas en tautologías, contradicciones y fórmulas contingentes:

 (a) $\neg p \to p$.
 (b) $p \to (q \to p)$.
 (c) $p \to (q \to \neg p)$.
 (d) $(p \to q) \wedge \neg(p \vee q)$.
 (e) $p \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow p)$.
 (f) $(p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge q)$.
 (g) $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$.
 (h) $\neg(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$.
 (i) $(p \to \neg(q \vee r)) \wedge (p \wedge (\neg q \to r))$.
 (j) $(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \leftrightarrow \neg((p \wedge q) \to r)$.
 (k) $(p \wedge q) \to (p \to (q \vee r))$.
 (l) $((p \to q) \wedge (r \to s)) \leftrightarrow ((p \vee r) \to (q \vee s))$.

2. Halle dos tautologías, dos contradicciones y dos fórmulas contingentes construidas con las letras proposicionales p y q y cuyas únicas conectivas sean la negación y la conjunción. Haga lo mismo con los siguientes pares de conectivas:

 (a) negación y disyunción,
 (b) negación y condicional,
 (c) negación y bicondicional.

3. Justifique si hacer uso del método de las tablas de verdad que las siguientes fórmulas son tautologías (para cualesquiera α, β y γ):

 (a) $((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \neg\beta)) \to \neg\alpha$.
 (b) $(\alpha \to \beta) \vee (\gamma \to \alpha)$.

 (c) $\alpha \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta))$.
 (d) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma))$.
 (e) $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$.
 (f) $(a \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma))$.
 (g) $((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)$.

4. Si los siguientes enunciados son verdaderos para cualesquiera fórmulas α y β, justifíquelos; si son falsos muestre que lo son:

 (a) Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \vee \beta$ es contingente.
 (b) Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingente.
 (c) Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \to \beta$ es contingente.
 (d) Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es contingente.
 (e) Si α y β son contradicciones, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología.
 (f) Si α es una tautología, entonces $\beta \to \alpha$ es una tautología.
 (g) Si α es una contradicción, entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.
 (h) $\alpha \wedge \beta$ es una tautología sii si tanto α como β son tautologías.
 (i) Si $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción, entonces α y β son contradicciones.
 (j) Si $\alpha \vee \beta$ es una tautología, entonces α o β son tautologías.
 (k) Si $\alpha \vee \beta$ es una fórmula contingente, entonces α y β son contingentes.
 (l) Si $\alpha \to \beta$ es una tautología, entonces α es una contradicción o β es una tautología.
 (m) Si $\alpha \to \beta$ es una fórmula contingente, entonces α y β son contingentes.

5. Indique en cada una de las situaciones que se describen a continuación qué tipo de fórmula es β. Tenga en cuenta que en algunos casos la respuesta correcta es una negación del tipo: «no es una tautología». Justifique la respuesta.

 (a) α es una tautología y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.
 (b) α es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es contingente.
 (c) α es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es contradicción.
 (d) α es una tautología y $\alpha \to \beta$ es contingente.
 (e) α es una tautología y $\alpha \to \beta$ es contradicción.
 (f) α es una contradicción y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.
 (g) α es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es una contradicción.
 (h) α es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es contingente.
 (i) α es una contradicción y $\beta \to \alpha$ es una tautología.
 (j) α es contingente y $\alpha \vee \beta$ es tautología.
 (k) α es contingente y $\alpha \wedge \beta$ es contradicción.
 (l) α es contingente y $\alpha \to \beta$ es tautología.
 (m) α es contingente y $\alpha \to \beta$ es contingente.

Capítulo 8

EQUIVALENCIA LÓGICA

1. El concepto de equivalencia lógica

Dos fórmulas son **lógicamente equivalentes** si toman el mismo valor de verdad con toda asignación. Formulado con algo más de precisión: α es lógicamente equivalente a β si y sólo si para toda asignación v, $v(\alpha) = v(\beta)$. Escribiremos

$$\alpha \equiv \beta \qquad \text{y} \qquad \alpha \not\equiv \beta$$

para expresar, respectivamente, que α equivale lógicamente a β y que α y β no son lógicamente equivalentes.

Podemos demostrar que $\alpha \equiv \beta$ justificando que para toda asignación v,

$$v(\alpha) = V \quad \text{sii} \quad v(\beta) = V$$

o, alternativamente, que para toda asignación v,

$$v(\alpha) = F \quad \text{sii} \quad v(\beta) = F.$$

En cada caso elegiremos la opción que nos parezca más conveniente. Más adelante veremos otros procedimientos para demostrar que dos fórmulas son lógicamente equivalentes.

Es muy importante no confundir el bicondicional con la relación de equivalencia lógica. El símbolo «$\leftrightarrow$» es una conectiva del lenguaje formal, mientras que el símbolo «$\equiv$» pertenece al metalenguaje, esto es, al lenguaje que usamos para hablar del lenguaje formal. Así, por ejemplo, mientras que $p \leftrightarrow q$ no es un enunciado, sino una fórmula (esto es, un objeto) del lenguaje formal,

$$p \equiv q$$

no es una fórmula, sino un enunciado del metalenguaje que afirma que p es lógicamente equivalente a q. Esta diferencia se comprende mejor cuando observamos que el enunciado «$p \equiv q$» es falso, ya que p y q pueden tomar distinto valor de verdad; pero en cambio la fórmula $p \leftrightarrow q$ no es por sí misma ni verdadera ni falsa, sino verdadera con algunas asignaciones y falsa con otras.

Aunque sean diferentes, el bicondicional y la relación de equivalencia lógica guardan cierto parentesco y precisamente por ello existe el peligro de

confusión. La siguiente proposición pone de manifiesto la relación exacta que hay entre el bicondicional con la equivalencia lógica:

Proposición 8.1. *Para cualesquiera fórmulas α y β,*

$$\alpha \equiv \beta \textit{ sii } \alpha \leftrightarrow \beta \textit{ es una tautología.}$$

Demostración. Si α y β son fórmulas cualesquiera,

$$\begin{aligned} \alpha \equiv \beta \quad & \text{sii} \quad \text{para toda asignación } v,\ v(\alpha) = v(\beta), \\ & \text{sii} \quad \text{para toda asignación } v,\ v(\alpha \leftrightarrow \beta) = V, \\ & \text{sii} \quad \alpha \leftrightarrow \beta \text{ es una tautología.} \end{aligned}$$

□

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que el método de las tablas de verdad también nos permite decidir si dos fórmulas α y β son lógicamente equivalentes: para ello basta con decidir mediante este método si el bicondicional $\alpha \leftrightarrow \beta$ es o no una tautología. Obsérvese además que si α y β tienen las mismas letras proposicionales, entonces $a \equiv \beta$ si y sólo si α y β tienen la misma tabla de verdad.

Propiedades básicas de la equivalencia lógica

Para cualesquiera fórmulas α, β y γ,

1. $\alpha \equiv \alpha$ (reflexividad),
2. si $\alpha \equiv \beta$, entonces $\beta \equiv \alpha$ (simetría),
3. si $\alpha \equiv \beta$ *y* $\beta \equiv \gamma$, entonces $\alpha \equiv \gamma$ (transitividad).

Las tres propiedades son tan evidentes que no precisan justificación. Considerada desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, la equivalencia lógica es, como su propio nombre indica, una relación de equivalencia en el conjunto de las fórmulas del lenguaje. Todas las fórmulas que pertenecen a la misma clase son lógicamente equivalentes y dos fórmulas lógicamente equivalentes pertenecen a la misma clase.

La transitividad de la equivalencia lógica permite justificar equivalencias del siguiente modo: para mostrar que una fórmula α es equivalente a una fórmula β basta con encontrar una sucesión de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\begin{gathered} \alpha \equiv \alpha_1 \\ \alpha_1 \equiv \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \equiv \alpha_n \\ \alpha_n \equiv \beta \end{gathered}$$

La cadena de fórmulas que nos lleva de una fórmula a otra lógicamente equivalente no tiene por qué ser única. Un poco más adelante veremos varias aplicaciones de este procedimiento.

Selección de equivalencias lógicas

1. Ley de la doble negación.

$$\neg\neg\alpha \equiv \alpha.$$

2. Idempotencia de la conjunción y de la disyunción.

(a) $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha.$
(b) $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha.$

3. Conmutatividad de la conjunción y de la disyunción.

(a) $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha.$
(b) $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha.$

4. Asociatividad de la conjunción y de la disyunción.

(a) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$
(b) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma).$

5. Distributividad de la conjunción respecto de la disyunción y de la disyunción respecto de la conjunción.

(a) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma).$
(b) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$

6. Leyes de De Morgan.

(a) $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta.$
(b) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta.$

Las equivalencias de los cuatro primeros apartados son evidentes. Las dos propiedades distributivas y la dos leyes de De Morgan se justifican de modo análogo, por lo que sólo justificaremos las primeras leyes de cada uno de estos casos.

(5a) Para ver que $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ toma siempre el mismo valor de verdad que $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$, mostraremos por separado que toda asignación que hace verdadera a la primera hace verdadera a la segunda y que toda asignación que hace verdadera a la segunda hace verdadera a la primera.

Si v es una asignación tal que $v(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) = V$, entonces $v(\alpha) = V$ y $v(\beta \vee \gamma) = V$; distinguimos entonces dos casos:

$$v(\beta) = V \qquad \text{o} \qquad v(\gamma) = V;$$

dado que $v(\alpha) = V$, si $v(\beta) = V$, entonces $v(\alpha \wedge \beta) = V$, y si $v(\gamma) = V$, entonces $v(\alpha \wedge \gamma) = V$; así, en cualquier caso

$$v((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) = V.$$

Sea ahora v una asignación tal que $v((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) = V$; existen entonces dos casos:

$$v(\alpha \wedge \beta) = V \qquad \text{o} \qquad v(\alpha \wedge \gamma) = V.$$

Si $v(\alpha \wedge \beta) = V$, entonces $v(\alpha) = V$ y $v(\beta) = V$; por tanto $v(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) = V$. Análogamente, si $v(\alpha \wedge \gamma) = V$, entonces $v(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) = V$.

(6a) En esta ocasión no separaremos los condicionales y justificaremos directamente que toda asignación hace verdadera a una de las fórmulas si y sólo si hace verdadera a la otra. Para toda asignación v:

$$\begin{aligned} v(\neg(\alpha \vee \beta)) = V \quad & \text{sii} \quad v(\alpha \vee \beta) = F, \\ & \text{sii} \quad v(\alpha) = F \ \text{ y } \ v(\beta) = F, \\ & \text{sii} \quad v(\neg\alpha) = V \ \text{ y } \ v(\neg\beta) = V, \\ & \text{sii} \quad v(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = V. \end{aligned}$$ □

Sobre la lista anterior es necesario hacer la misma advertencia que hicimos en el caso de las tautologías. Todas las equivalencias de la lista son, en rigor, esquemas que dan lugar a equivalencias lógicas concretas cuando se sustituyen todas sus variables por fórmulas concretas. Por otro lado, es importante observar que puede obtenerse un esquema de tautologías de cada uno de estos esquemas de equivalencias, tal como establece la proposición 8.1.

Omisión de paréntesis

Las leyes asociativas de la conjunción y de la disyunción justifican la introducción de una nueva regla de simplificación de paréntesis: se pueden omitir los paréntesis cuya única finalidad es agrupar una sucesión de conjunciones o de disyunciones. En los siguientes ejemplos las fórmulas de la derecha resultan de aplicar esta regla de omisión de paréntesis a las fórmulas de la izquierda:

$$\begin{array}{ll} (p \wedge \neg t) \wedge (q \wedge r) & p \wedge \neg t \wedge q \wedge r, \\ p \vee (t \vee (\neg q \vee r)) & p \vee t \vee \neg q \vee r, \\ (p \to \neg t) \wedge (q \wedge (r \vee p)) & (p \to \neg t) \wedge q \wedge (r \vee p), \\ p \to (\neg t \vee (q \vee (r \wedge p))) & p \to (\neg t \vee q \vee (r \wedge p)). \end{array}$$

PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN DE FÓRMULAS EQUIVALENTES *Si en una fórmula α sustituimos una de sus subfórmulas β por una fórmula lógicamente equivalente a β, obtendremos una fórmula lógicamente equivalente a α.*

No vamos a demostrar con todo rigor este principio, pero la siguiente observación mostrará que se cumple. Si sustituimos una subfórmula de una fórmula dada por otra lógicamente equivalente a ella, el valor de verdad que toma la fórmula inicial con una asignación cualquiera debe ser el mismo que el que toma la fórmula que obtenemos después de efectuar la sustitución, puesto que hemos sustituido una subfórmula por otra fórmula que toma el mismo valor de verdad que ella con cualquier asignación.

Veamos un ejemplo. La fórmula

$$\neg(p \wedge q) \to \neg(p \wedge \neg\neg r)$$

es lógicamente equivalente a

$$(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge r)$$

porque ésta resulta de sustituir dos subfórmulas de la primera por dos fórmulas lógicamente equivalentes a ellas: $\neg(p \wedge q)$ por $\neg p \vee \neg q$ y $\neg\neg r$ por r.

2. Eliminación de conectivas

Todas las conectivas excepto la negación pueden eliminarse en favor de otras, lo cual significa que todo lo que expresamos con una de estas conectivas puede expresarse también con otras diferentes. Ofrecemos a continuación la lista de las equivalencias necesarias para justificar esta afirmación y después la formularemos con precisión:

1. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.
2. $\alpha \to \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$.
3. $\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.
4. $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$.
5. $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.
6. $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$.
7. $\alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \to \beta$.

Justificaremos las tres primeras equivalencias y dejaremos las restantes como ejercicio.

(1) Para toda asignación v:

$$\begin{aligned} v(\alpha \leftrightarrow \beta) = F \quad &\text{sii} \quad v(\alpha) = V \text{ y } v(\beta) = F, \text{ o } v(\alpha) = F \text{ y } v(\beta) = V \\ &\text{sii} \quad v(\alpha \to \beta) = F \text{ o } v(\beta \to \alpha) = F \\ &\text{sii} \quad v((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)) = F \end{aligned}$$

(2) Para toda asignación v:

$$\begin{aligned} v(\alpha \to \beta) = V \quad &\text{sii} \quad v(\alpha) = F \text{ o } v(\beta) = V \\ &\text{sii} \quad v(\alpha) = F \text{ o } v(\neg\beta) = F \\ &\text{sii} \quad v(\alpha \wedge \neg\beta) = F \\ &\text{sii} \quad v(\neg(\alpha \wedge \neg\beta)) = V \end{aligned}$$

(3) La justificación de que $\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ es un ejemplo particularmente sencillo de aplicación de la transitividad de la equivalencia lógica y del principio de sustitución de fórmulas equivalentes:

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta &\equiv \neg\neg(\alpha \vee \beta) && \text{por la ley de la doble negación,} \\ &\equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) && \text{por la ley de De Morgan anterior.} \end{aligned}$$ □

Hablando con cierta informalidad, la segunda y la tercera equivalencia nos dicen cómo expresar el condicional y la disyunción en términos de la negación y la conjunción. También el bicondicional puede expresarse en términos de estas conectivas, como muestra la equivalencia

(8.1) $$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)$$

que se obtiene al combinar (1) y (2). Las equivalencias (1), (4) y (5) consideradas en conjunto nos permiten expresar el bicondicional, el condicional y la conjunción en términos de la negación y la disyunción. La equivalencia correspondiente al bicondicional se obtiene aplicando (4) y (5) a (1):

(8.2) $$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \neg(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg(\neg\beta \vee \alpha)).$$

Por último, con ayuda de las equivalencias (1), (6) y (7) podemos expresar el bicondicional, la conjunción y la disyunción en términos de la negación y el condicional. La equivalencia correspondiente al bicondicional resulta de aplicar (6) a (1):

(8.3) $$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \neg((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha)).$$

En la siguiente proposición se formulan con precisión estos tres hechos.

PROPOSICIÓN 8.2.

(1) *Toda fórmula es lógicamente equivalente a una que tiene las mismas letras proposicionales y cuyas únicas conectivas son la negación y la conjunción.*

(2) *Toda fórmula es lógicamente equivalente a una que tiene las mismas letras proposicionales y cuyas únicas conectivas son la negación y la disyunción.*

(3) *Toda fórmula es lógicamente equivalente a una que tiene las mismas letras proposicionales y cuyas únicas conectivas son la negación y el condicional.*

DEMOSTRACIÓN. Los tres apartados se justifican de modo análogo, por lo que justicaremos sólo (1) y dejaremos la demostración de (2) y (3) como ejercicio.

Para facilitar la exposición, usaremos α' para referirnos a una fórmula que tiene las mismas letras proposicionales que α y cuyas únicas conectivas son la negación y la conjunción. Así, lo que deseamos justificar es que para toda fórmula α hay una fórmula α' lógicamente equivalente a α. La demostración es otro ejemplo de aplicación del primer principio de inducción para fórmulas. En este caso, la propiedad es, obviamente, la de ser lógicamente equivalente a una fórmula que tiene las mismas letras proposicionales y cuyas únicas conectivas son la negación y la conjunción. Brevemente, una fórmula α tiene la propiedad en cuestión si hay una fórmula α' lógicamente equivalente a α.

1) Todas las letras proposicionales tienen la propiedad, pues no tienen conectivas y son equivalentes a sí mismas.

2) Supongamos que α tiene la propiedad, es decir, supongamos que existe α' tal que $\alpha \equiv \alpha'$ (hipótesis inductiva). Observemos ahora que $\neg\alpha'$ tiene las mismas letras proposicionales que $\neg\alpha$ y que sus únicas conectivas son la negación y la conjunción. Además, $\neg\alpha \equiv \neg\alpha'$, pues $\alpha \equiv \alpha'$. Esto muestra que $\neg a$ es equivalente a una fórmula tiene las mismas letras proposicionales y cuyas únicas conectivas son la negación y la conjunción.

3) Supongamos que α y β tienen la propiedad, es decir, que existen α' y β' tales que $\alpha \equiv \alpha'$ y $\beta \equiv \beta'$ (hipótesis inductiva). Es fácil verificar que se cumplen las siguientes equivalencias:

$\alpha \wedge \beta$	$\equiv \alpha' \wedge \beta'$	por h. ind.
$\alpha \vee \beta$	$\equiv \neg(\neg\alpha' \wedge \neg\beta')$	por h. ind. y eq. (3) de esta sec.
$\alpha \to \beta$	$\equiv \neg(\alpha' \wedge \neg\beta')$	por h. ind. y eq. (2) de esta sec.
$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\equiv \neg(\alpha' \wedge \neg\beta') \wedge \neg(\beta' \wedge \neg\alpha')$	por h. ind. y eq. (8.1).

Puesto que todas las fórmulas de la izquierda tienen las mismas letras proposicionales que $\alpha * \beta$ (donde $*$ es una conectiva binaria) y sus únicas conectivas son la negación y la conjunción, concluimos que toda fórmula de la forma $\alpha * \beta$ es equivalente a otra que tiene la propiedad deseada.

El primer principio de inducción para fórmulas nos permite ahora concluir que toda fórmula es lógicamente equivalente a otra que tiene las mismas letras proposicionales y cuyas únicas conectivas son la negación y la conjunción. □

Veamos el modo de eliminar en la práctica una conectiva de una fórmula. Supongamos que deseamos hallar una fórmula lógicamente equivalente a una dada en la que no aparezca una conectiva como, por ejemplo, el condicional. Elegimos una subfórmula de la forma $\alpha \to \beta$ y la sustituimos por $\neg\alpha \vee \beta$ o por

$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$, dependiendo de si deseamos eliminar el condicional en favor de la negación y la disyunción o en favor de la negación y la conjunción. Si en la fórmula que resulta de realizar esta sustitución no aparece ningún condicional, ya hemos concluido; si aparece todavía algún condicional, repetimos con esta fórmula la misma operación que acabamos de hacer con la inicial. Después de un número finito de sustituciones llegaremos a una fórmula que, en virtud del principio de sustitución de fórmulas equivalentes y de la transitividad de la equivalencia lógica, será equivalente a la de partida y en la que no aparecerá el condicional.

Un ejemplo nos ayudará a entender el procedimiento. La siguiente sucesión de equivalencias muestra cómo obtener una fórmula lógicamente equivalente a

$$(p \leftrightarrow r) \to (q \vee p)$$

cuyas únicas conectivas son la negación y la conjunción:

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow r) \to (q \vee p) &\equiv \neg((p \leftrightarrow r) \wedge \neg(q \vee p)) && \text{por (2)},\\ &\equiv \neg((p \to r) \wedge (r \to p) \wedge \neg(q \vee p)) && \text{por (1)},\\ &\equiv \neg(\neg(p \wedge \neg r) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge \neg(q \vee p)) && \text{por (2)},\\ &\equiv \neg(\neg(p \wedge \neg r) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge \neg q \wedge \neg p) && \text{por (3)}.\end{aligned}$$

3. Ejercicios

1. Averigüe si las siguientes equivalencias lógicas son verdaderas o no. Justifique la respuesta.

   (a) $p \vee p \equiv p$.
   (b) $p \to q \equiv \neg p \to \neg q$.
   (c) $p \leftrightarrow p \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$.
   (d) $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$.
   (e) $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$.
   (f) $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$.
   (g) $(p \to q) \to r \equiv p \to (q \to r)$.

2. Para cada una de las equivalencias siguientes encuentre fórmulas α y β (no necesariamente distintas) que las hagan verdaderas:

   (a) $\alpha \equiv \alpha \to \beta$.
   (b) $\neg\alpha \equiv \alpha \to \beta$.
   (c) $\alpha \equiv \neg\alpha \wedge \beta$.
   (d) $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \to \beta$.
   (e) $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \beta \to \neg\alpha$.
   (f) $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \wedge \beta$.

3. Justifique, aplicando la definición de las condiciones de verdad de las conectivas, las siguientes equivalencias:

   (a) $\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$ (ley de trasposición).
   (b) $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma \equiv \alpha \to (\beta \to \gamma)$ (ley de exportación).
   (c) $\alpha \to (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \to \gamma$.
   (d) $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv \alpha \leftrightarrow \neg\beta$.
   (e) $\alpha \leftrightarrow \neg\beta \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.

4. Si los siguientes enunciados son verdaderos para cualesquiera fórmulas α, β y γ, justifíquelos; si son falsos, halle un ejemplo que lo muestre.

   (a) Si $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \alpha$, entonces β es una tautología.
   (b) Si $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \wedge \gamma$, entonces $\beta \equiv \gamma$.
   (c) Si $\alpha \equiv \alpha \vee \beta$, entonces α es una tautología.
   (d) Si β es una contradicción, entonces $\alpha \equiv \alpha \vee \beta$.
   (e) Si $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \vee \beta$, entonces $\alpha \equiv \beta$.
   (f) Si $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \vee \gamma$, entonces $\beta \equiv \gamma$.
   (g) Si $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \to \beta$, entonces α es una tautología.
   (h) Si $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \to \gamma$, entonces $\beta \equiv \gamma$.
   (i) Si $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \to \beta$, entonces β es una tautología.
   (j) Si $\alpha \to \beta \equiv \alpha \to \gamma$, entonces $\beta \equiv \gamma$.

5. Justifique aplicando las equivalencias lógicas introducidas en las secciones 8.1 y 8.2:

   (a) $\neg(p \vee q) \to (p \wedge q) \equiv p \vee q$.
   (b) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.
   (c) $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \to r$.
   (d) $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$.
   (e) $(p \wedge q) \to r \equiv \neg r \to (\neg p \vee \neg q)$.

6. Justifique las equivalencias 4, 5, 6 y 7 de la sección 8.2.

7. Para cada una de las fórmulas siguientes halle otra equivalente cuyas únicas conectivas sean la negación y la conjunción.

   (a) $(p \leftrightarrow q) \to r$.
   (b) $\neg(p \to q) \vee \neg r$.
   (c) $p \to (q \vee r)$.
   (d) $(\neg p \to q) \vee \neg r$.
   (e) $\neg(p \leftrightarrow r) \to (\neg q \vee p)$.

8. Para cada una de las fórmulas siguientes halle otra equivalente cuyas únicas conectivas sean la negación y la disyunción.

   (a) $p \to (q \to r)$.
   (b) $(p \leftrightarrow q) \to r$.
   (c) $(\neg p \to q) \wedge \neg r$.
   (d) $\neg(p \leftrightarrow q) \to \neg r$.
   (e) $\neg(p \wedge r) \to \neg(q \wedge p)$.

9. Para cada una de las fórmulas siguientes halle otra equivalente cuyas únicas conectivas sean la negación y el condicional.

   (a) $\neg(p \wedge q) \vee \neg r$.
   (b) $(p \vee q) \leftrightarrow r$.
   (c) $(\neg p \vee q) \vee \neg r$.
   (d) $\neg(p \leftrightarrow q) \vee \neg r$.
   (e) $\neg(p \wedge r) \wedge (\neg q \vee p)$.

10. Demuestre los apartados (2) y (3) de la proposición 8.2.

11. Demuestre por inducción que toda fórmula es lógicamente equivalente a otra que tiene las mismas letras proposicionales, cuyas únicas conectivas son la negación, la conjunción y la disyunción, y tal que las negaciones sólo afectan a letras proposicionales.

12. Sea α una fórmula cuyas únicas conectivas son la negación, la conjunción y la disyunción. Sea α' la fórmula que resulta de reemplazar en α cada letra proposicional por su negación y de cambiar $\wedge$ por $\vee$ y $\vee$ por $\wedge$. Demuestre por inducción que $\neg\alpha \equiv \alpha'$.

13. Sea p una letra proposicional y α una fórmula. Si β es una fórmula cualquiera, con β' nos referimos a la fórmula que resulta de reemplazar p por α en β. Sean v y u asignaciones tales que u atribuye a p el valor $v(\alpha)$ y a las restantes letras el mismo valor que v.

   (a) Demuestre que para toda fórmula β, $v(\beta') = u(\beta)$.
   (b) Demuestre que para toda fórmula β, β es una tautología sii β' es una tautología.

14. ¿Cuántas fórmulas no lógicamente equivalentes entre sí podemos formar con una sola letra proposicional?, ¿cuántas con dos letras proposicionales?, ¿y con tres? Generalice la respuesta a n letras proposicionales.

15. ¿Cuántas clases de equivalencia con respecto a la relación de equivalencia lógica hay en un lenguaje con una sola letra proposicional?, ¿cuántas en un lenguaje con dos letras?, ¿y con tres? Generalice la respuesta a n letras proposicionales.

Capítulo 9

CONSECUENCIA LÓGICA

1. Satisfacibilidad

Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** si existe una asignación que hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ. Si Γ no es satisfacible decimos que es **insatisfacible**. Si una asignación v hace verdaderas a todas las fórmulas de un conjunto Γ (esto es, si para toda $\alpha \in \Gamma$, $v(\alpha) = V$), decimos que v **satisface** Γ. Así, un conjunto de fórmulas Γ es satisfacible si y sólo si existe una asignación v tal que v satisface Γ. Observemos que v satisface $\{\alpha\}$ si y sólo si $v(\alpha) = V$.

PROPOSICIÓN 9.1. *Para cualesquiera fórmulas* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

(1) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es satisfacible si y sólo si existe una asignación* v *tal que* $v(a_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) = V$,

(2) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es insatisfacible si y sólo si* $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n$ *es una contradicción.*

DEMOSTRACIÓN. Justificaremos sólo (1), ya que (2) es una reformulación de (1). Por definición de satisfacibilidad, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es satisfacible sii existe una asignación v tal que $v(\alpha_1) = V$ y ... y $v(\alpha_n) = V$. Ahora bien, $v(a_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) = V$ sii $v(\alpha_1) = V$ y ... y $v(\alpha_n) = V$. De este modo, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es satisfacible sii existe una asignación v tal que $(a_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) = V$ □

Este resultado muestra que el problema de averiguar si un conjunto finito de fórmulas es satisfacible se reduce al de averiguar si una fórmula es o no una contradicción y, en consecuencia, que el método de las tablas de verdad también permite decidir si un conjunto finito de fórmulas es satisfacible.

En los dos ejemplos siguientes mostraremos cómo llegar a una conclusión sobre la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas con más rapidez y eficiencia que usando las tablas de verdad. Para averiguar si un conjunto es satisfacible suponemos que existe una asignación que hace verdaderas a todas las fórmulas del conjunto. Si esta suposición nos lleva a una contradicción, hemos mostrado que el conjunto es insatisfacible. Si el conjunto es satisfacible, este modo de

razonar nos ayuda a encontrar sin demasiadas dificultades una asignación que hace verdaderas a todas las fórmulas del conjunto.

EJEMPLOS

1. Para averiguar si el conjunto

$$q \vee \neg p,$$
$$q \to \neg r,$$
$$p \wedge r$$

es satisfacible suponemos que existe una asignación v que hace verdaderas a todas las fórmulas del conjunto. En este caso, $v(p) = V$ y $v(r) = V$, pues $v(p \wedge r) = V$; además, $v(q) = V$, ya que $v(q \vee \neg p) = V$ y $v(\neg p) = F$; así,

$$v(p) = V, \qquad v(q) = V \qquad \text{y} \qquad v(r) = V;$$

pero entonces $v(q \to \neg r) = F$, en contra de nuestra suposición inicial. Esto prueba que ninguna asignación puede hacer verdaderas a las tres fórmulas del conjunto y, por tanto, que el conjunto es insatisfacible.

2. Supongamos que deseamos averiguar si el conjunto de fórmulas

$$p \to (q \to \neg r),$$
$$p \wedge (q \vee \neg r)$$

es satisfacible. Imaginemos que v es una asignación que hace verdaderas a todas las fórmulas del conjunto. En este caso, $v(p \wedge (q \vee \neg r)) = V$ y, por tanto, $v(p) = V$ y $v(q \vee \neg r) = V$; demá s, $v(p \to (q \to \neg r)) = V$, de modo que $v(q \to \neg r) = V$ (pues $v(p) = V$); así,

$$v(p) = V, \qquad v(q \vee \neg r) = V \qquad \text{y} \qquad v(q \to \neg r) = V;$$

pero de aquí no podemos derivar ninguna contradicción; lo que sí podemos concluir es que $v(p) = V$ y $v(r) = F$ (pues si $v(r) = V$, es imposible que $v(q \vee \neg r) = V$ y $v(q \to \neg r) = V$); ahora basta con asignar un valor de verdad a q para tener resuelto el problema; por ejemplo, la asignación

$$v(p) = V, \qquad v(q) = V \qquad \text{y} \qquad v(r) = F$$

hace verdaderas a las dos fórmulas del conjunto y esto muestra que el conjunto es satisfacible.

2. Consecuencia lógica

Una fórmula α es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas Γ, en símbolos, $\Gamma \models \alpha$, si y sólo si toda asignación que satisface Γ hace verdadera a α. Explícitamente, $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si toda asignación que hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ hace también verdadera a α o, dicho de otro modo, $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si no hay ninguna asignación que haga verdaderas a todas las fórmulas del conjunto Γ y falsa a α.

Para expresar que una fórmula α no es consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ escribiremos «$\Gamma \not\models \alpha$». Obviamente, $\Gamma \not\models \alpha$ si y sólo si existe una asignación de valores de verdad que hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ y falsa a α.

Si una fórmula α es consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ se dice también que **Γ implica α**. Así, «$\Gamma \models \alpha$» puede leerse como «α es consecuencia de Γ» o como «Γ implica α». Si $\Gamma = \{\beta\}$, en lugar de «$\{\beta\} \models \alpha$» escribiremos «$\beta \models \alpha$» y diremos que β implica α o que α es consecuencia de β. Si $\Gamma = \emptyset$, en lugar de «$\emptyset \models \alpha$» escribiremos «$\models \alpha$».

Un **argumento** está constituido por un conjunto finito de fórmulas Γ y una fórmula α. Las fórmulas de Γ son las **premisas** y α es la **conclusión**. Si $\Gamma \models \alpha$, decimos que el argumento es **correcto** o **lógicamente válido**. Si $\Gamma \not\models \alpha$, decimos que el argumento es **incorrecto** o **inválido**.

El argumento cuyas premisas son las fórmulas del conjunto $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ y cuya conclusión es α, puede representarse del siguiente modo:

$$\begin{array}{c} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ \hline \alpha \end{array}$$

Cuando introdujimos la relación de equivalencia lógica advertimos de la importancia de distinguir el bicondicional de la relación de equivalencia lógica y ahora debemos hacer la misma advertencia sobre el condicional y la implicación. El símbolo «$\rightarrow$» es una conectiva del lenguaje formal, mientras que el símbolo «$\models$» pertenece al metalenguaje. Así, por ejemplo, mientras que $p \rightarrow q$ es una fórmula del lenguaje formal,

$$p \models q$$

no es una fórmula sino un enunciado metalingüístico que afirma que p implica q. La fórmula $p \rightarrow q$ no es por sí misma ni verdadera ni falsa, sino verdadera con algunas asignaciones y falsa con otras; en cambio podemos afirmar que $p \not\models q$, ya que, obviamente, existe una asignación que hace verdadera a p y falsa a q. La proposición 9.4-(2), que justificaremos más adelante, pone de manifiesto la relación exacta que hay entre el condicional y la implicación.

Podemos determinar si una fórmula es o no consecuencia de un conjunto finito de fórmulas mediante las tablas de verdad. Excepcionalmente, vamos a

resolver un par de ejemplos con la ayuda de este procedimiento, porque puede ayudarnos a mejorar nuestra comprensión del concepto de consecuencia.

Supongamos que deseamos averiguar si las fórmulas $p \leftrightarrow r$ y $p \wedge r$ son consecuencia del conjunto de fórmulas $\{(p \leftrightarrow q), (r \leftrightarrow (p \wedge q))\}$ o, en otras palabras, si los argumentos

$$\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ r \leftrightarrow (p \wedge q) \\ \hline p \leftrightarrow r \end{array}, \qquad \begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ r \leftrightarrow (p \wedge q) \\ \hline p \wedge r \end{array}$$

son correctos o no. Para evitar repeticiones inútiles analizaremos conjuntamente ambos argumentos.

Las asignaciones que debemos tomar en consideración para determinar si un argumento es correcto son las posibles atribuciones de valores de verdad a todas las letras que aparecen en el argumento. Así, cuando aplicamos el método de las tablas de verdad no hacemos una tabla para cada una de las fórmulas del argumento, sino una única tabla en la que se toman en consideración todas las asignaciones de las que depende la corrección de ese argumento. La tabla de verdad adecuada para discutir la corrección de los dos argumentos que estamos analizando es la siguiente:

	p	q	r	$p \wedge r$	$p \leftrightarrow q$	$r \leftrightarrow (p \wedge q)$	$p \leftrightarrow r$
1.	V	V	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	F	V	F	F
3.	V	F	V	V	F	F	V
4.	V	F	F	F	F	V	F
5.	F	V	V	F	F	F	F
6.	F	V	F	F	F	V	V
7.	F	F	V	F	V	F	F
8.	F	F	F	F	V	V	V

La llave horizontal superior indica las columnas en las que debemos fijarnos para decidir si $p \wedge r$ es consecuencia de las premisas. La llave horizontal inferior indica lo mismo para la fórmula $p \leftrightarrow r$. Hemos numerado las asignaciones para facilitar su localización cuando nos refiramos a ellas por el lugar que ocupan en la tabla.

Si observamos las columnas pertinentes para decidir si $p \leftrightarrow r$ es consecuencia de las premisas veremos que todas las asignaciones que hacen verdaderas

a las premisas (la primera y la última), hacen también verdadera a $p \leftrightarrow r$. Por tanto, el primer argumento es correcto, esto es, $p \leftrightarrow r$ es consecuencia de las premisas. Por otro lado, la tabla nos muestra que existe una asignación (la última) que hace verdaderas a las premisas y falsa a $p \wedge r$. Concluimos, por tanto, que el segundo argumento no es correcto, esto es, que $p \wedge r$ no es consecuencia de las premisas.

Al comienzo del libro explicamos el concepto intuitivo de consecuencia, mostramos la necesidad de precisarlo y dijimos que una tarea esencial de la lógica era proponer precisiones del mismo. Ahora que ya hemos introducido la definición de consecuencia para la lógica proposicional, es importante que valoremos en qué sentido y en qué medida dicha definición es una precisión del concepto intuitivo.

Según el concepto intuitivo, un argumento es correcto si siempre que las premisas son verdaderas la conclusión también lo es o, dicho de un modo equivalente, si es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. El problema de esta caracterización intuitiva es la imprecisión de los conceptos de verdad y posibilidad. En lógica se comienza precisando el lenguaje para el que se va a definir el concepto de consecuencia. En el caso de la lógica proposicional, el concepto de verdad se define con precisión mediante el de asignación. El conjunto de asignaciones para un lenguaje dado está perfectamente determinado. Hablar de posibilidad o imposibilidad de que una fórmula sea verdadera no es, en este contexto, nada más que un manera informal de hablar de la existencia o inexistencia de una asignación que hace verdadera a dicha fórmula. De este modo, cuando decimos que un argumento es correcto si no existe una asignación que haga verdaderas a la premisas y falsa a la conclusión, no hacemos otra cosa que precisar el concepto intuitivo de argumento correcto para el lenguaje de la lógica proposicional.

Para mostrar que la corrección intuitiva de un argumento del lenguaje natural no depende de la verdad o falsedad de hecho de las premisas y la conclusión, vimos que un argumento incorrecto puede tener premisas verdaderas y conclusión verdadera, y que existen argumentos correctos con premisas falsas y conclusión falsa, e incluso con premisas falsas y conclusión verdadera. Es fácil ver que estas propiedades del concepto intuitivo concuerdan con las que tiene la precisión definida para la lógica proposicional. En efecto, la existencia de asignaciones que hacen falsas a las premisas y a la conclusión, o de asignaciones que hacen falsas a las premisas y verdadera a la conclusión carece de importancia para decidir si un argumento es correcto o no lo es. Volviendo a los argumentos que nos sirven de ejemplo, el hecho de que la tercera asignación haga falsas a las premisas y verdadera a $p \leftrightarrow r$, o que la quinta haga falsas tanto a las premisas como a $p \leftrightarrow r$ no impide que esta fórmula sea consecuencia de las premisas. Tampoco la existencia de una asignación que hace verdaderas a las premisas y a la conclusión basta para afirmar que un argumento es correcto. La primera asignación hace verdaderas a las premisas y a $p \wedge r$, y no por ello esta fórmula es consecuencia de las premisas.

Para demostrar sin recurrir a las tablas de verdad que una fórmula α es consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ podemos seguir dos estrategias.

En una *demostración directa* se supone que v es una asignación cualquiera que satisface Γ y se demuestra que v también hace verdadera a α. En una *demostración indirecta* (o, *por reducción al absurdo*) se supone que existe una asignación que satisface Γ y hace falsa a α, y se deriva una contradicción de este supuesto. Para demostrar que una fórmula α no es consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ basta con exhibir una asignación que haga verdaderas a todas las fórmulas de Γ y falsa a α.

Como ejemplo de demostración directa vamos a justificar la corrección del único de los dos argumento anteriores que es correcto:

$$\frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ r \leftrightarrow (p \wedge q)p \end{array}}{p \leftrightarrow r}\,.$$

Supongamos que v es una asignación que hace verdaderas a las dos premisas. Puesto que $v(p \leftrightarrow q) = V$ y $v(r \leftrightarrow (p \wedge q)) = V$,

$$v(p) = v(q) \qquad \text{y} \qquad v(r) = v(p \wedge q).$$

Observemos ahora que

$$v(p) = v(p \wedge q),$$

ya que si $v(p) = F$, entonces $v(p \wedge q) = F$ y si $v(p) = V$, entonces $v(p \wedge q) = V$ (pues $v(p) = v(q)$). De este modo, $v(p) = v(r)$ y, por tanto, $v(p \leftrightarrow r) = V$. Esto muestra que cualquier asignación que hace verdaderas a las premisas, hace también verdadera a la conclusión.

Mostraremos ahora por reducción al absurdo que $p \to r$ es consecuencia de las dos premisas del argumento anterior. Sea v una asignación que hace verdaderas a $(p \leftrightarrow q)$ y a $r \leftrightarrow (p \wedge q)$, y falsa a $p \to r$. En este caso, $v(p) = V$ y $v(r) = F$, pues $v(p \to r) = F$. Así, $v(q) = V$, pues $v(p \leftrightarrow q) = V$. Pero entonces, $v(p \wedge q) = V$ y, por tanto, $v(r \leftrightarrow (p \wedge q)) = F$, en contra de lo que habíamos supuesto.

Propiedades básicas de la relación de consecuencia

Para cualesquiera conjuntos de fórmulas Γ y Δ, y cualesquiera fórmulas α y β,

1. $\alpha \models \alpha$ (reflexividad),
2. si $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \models \alpha$ (monotonía),
3. si $\Gamma \models \alpha$ y $\alpha \models \beta$, entonces $\Gamma \models \beta$ (transitividad).

Las tres propiedades son consecuencia inmediata de las definiciones de los conceptos que intervienen en su formulación. Así, por ejemplo, para ver que (2) es verdadera basta con observar que si una asignación satisface Δ, entonces

satisface Γ (pues $\Gamma \subseteq \Delta$) y, puesto que $\Gamma \models \alpha$, hace verdadera a α. Obsérvese que de (1) y (2) se sigue inmediatamente que para toda fórmula α y todo conjunto de fórmulas Γ, si $\alpha \in \Gamma$, entonces $\Gamma \models \alpha$.

Las siguientes proposiciones son esenciales para comprender la semántica de la lógica proposicional porque relacionan el concepto de consecuencia lógica con otros conceptos que hemos introducido.

PROPOSICIÓN 9.2. *Para cualesquiera fórmulas α y β*

(1) $\alpha \equiv \beta$ *si y sólo si* $\alpha \models \beta$ *y* $\beta \models \alpha$,

(2) $\alpha \equiv \beta$ *si y sólo si para toda* γ, $\alpha \models \gamma$ *sii* $\beta \models \gamma$.

DEMOSTRACIÓN. (1) es una consecuencia inmediata de los conceptos de consecuencia y equivalencia lógica. Justificaremos (2) mostrando en primer lugar que si $\alpha \equiv \beta$, entonces para toda γ, $\alpha \models \gamma$ sii $\beta \models \gamma$ y, en segundo lugar que si para toda γ, $\alpha \models \gamma$ sii $\beta \models \gamma$, entonces $\alpha \equiv \beta$.

Supongamos que $\alpha \equiv \beta$, lo que, por (1), significa que $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$. Sea γ una fórmula cualquiera. Si $\alpha \models \gamma$, entonces $\beta \models \gamma$, pues $\beta \models \alpha$ y la relación de consecuencia es transitiva. Por la misma razón, si $\beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$. Por tanto, $\alpha \models \gamma$ sii $\beta \models \gamma$.

Supongamos que para toda γ, $\alpha \models \gamma$ sii $\beta \models \gamma$. Así, $\beta \models \alpha$, puesto que $\alpha \models \alpha$. Del mismo modo, $\alpha \models \beta$. Por (1), $\alpha \equiv \beta$. □

PROPOSICIÓN 9.3. *Para todo conjunto de fórmulas Γ y toda fórmula α,*

$$\Gamma \models \alpha \quad \textit{sii} \quad \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \textit{ es insatisfacible.}$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de implicación, $\Gamma \models \alpha$ significa que no hay ninguna asignación que satisfaga Γ y haga falsa a α. Ahora bien, esto equivale a decir que no hay ninguna asignación que satisfaga Γ y haga verdadera a $\neg\alpha$; lo cual, por definición de satisfacibilidad, significa que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible. □

PROPOSICIÓN 9.4. *Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, α y β son fórmulas,*

(1) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta$ *sii* $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ *es una tautología*

(2) $\alpha \models \beta$ *sii* $\alpha \rightarrow \beta$ *es una tautología.*

(3) $\models \beta$ *sii* β *es una tautología.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Por definición de consecuencia, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \alpha$ sii para toda asignación v, si v satisface $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, entonces $v(\alpha) = V$. Por la proposición 9.1,

$$v \text{ satisface } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \text{ sii } v(a_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) = V.$$

De este modo, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \alpha$ si y sólo si para toda asignación v, si $v(a_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) = V$, entonces $v(\alpha) = V$. Para concluir la demostración basta con observar que $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$ es una tautología si y sólo si para toda asignación v, si $v(a_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) = V$, entonces $v(\alpha) = V$.

(2) es un caso particular de (1). Para la justificación de (3) sólo hay que tener en cuenta que toda asignación satisface vacuamente el conjunto vacío de fórmulas. □

PROPOSICIÓN 9.5. *Para toda fórmula α,*

(1) α *es una tautología sii es consecuencia de cualquier conjunto de fórmulas.*

(2) α *es una tautología sii es consecuencia de cualquier fórmula.*

DEMOSTRACIÓN. Justificaremos solamente (1), porque (2) se justifica del mismo modo. Supongamos que es α una tautología y Γ un conjunto cualquiera de fórmulas. Puesto que toda asignación hace verdadera a α, es obvio que toda asignación que satisface Γ hace verdadera a α. Así, $\Gamma \models \alpha$.

Supongamos ahora que α es consecuencia de cualquier conjunto de fórmulas. En particular, $\{p \vee \neg p\} \models \alpha$ o, lo que es lo mismo, $p \vee \neg p \models \alpha$. Pero toda asignación hace verdadera a $p \vee \neg p$ (puesto que es una tautología); por tanto, toda asignación hace verdadera a α, esto es α es una tautología. □

PROPOSICIÓN 9.6. *Para toda fórmula α, α es una contradicción si y sólo si toda fórmula es consecuencia de α.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que α es una contradicción y que β es una fórmula cualquiera. Si α no implicara β, existiría una asignación que haría verdadera a α y falsa a β. Así, α no sería una contradicción. Por tanto, si α es una contradicción, β es consecuencia de α.

Por otro lado, si α implica a cualquier fórmula, en particular implicará a una contradicción como, por ejemplo, $p \wedge \neg p$. Ahora bien, puesto que toda asignación hace falsa a una contradición, toda asignación hace falsa a las fórmulas que las implican. En otras palabras, toda fórmula que implica a una contradicción, es también una contradicción. En consecuencia, α es una contradicción. □

PROPOSICIÓN 9.7. *Para todo conjunto de fórmulas Γ, Γ es insatisfacible si y sólo si toda fórmula es consecuencia de Γ.*

DEMOSTRACIÓN. Lo dejamos como ejercicio. □

PROPOSICIÓN 9.8. *Para toda fórmula* α, α *es contingente si y sólo si hay alguna fórmula que no es consecuencia de* α *y hay alguna fórmula de la que* α *no es consecuencia.*

DEMOSTRACIÓN. Esta proposición es una consecuencia inmediata de las proposiciones 9.5 y 9.6 y del hecho de que una fórmula es contingente si y sólo si no es ni una tautología ni una contradicción. □

3. Ejercicios

1. Para cada uno de los conjuntos siguientes, indique si es satisfacible o no. En caso de que sea satisfacible, halle una asignación que lo muestre.

(a) $p \to q$, $\neg p \to \neg q$

(b) $\neg p \lor q$, $q \to \neg p$, p

(c) $p \to \neg(q \land \neg r)$, $p \land \neg r$, $q \lor r$

(d) $p \leftrightarrow q$, $p \leftrightarrow \neg r$, $\neg q \lor r$

(e) $p \to (q \to r)$, $p \leftrightarrow \neg r$, $q \leftrightarrow r$

(f) $\neg(p \leftrightarrow (q \land r))$, $\neg q \to \neg p$, $\neg s \lor r$, $p \land s$

(g) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg r)$, $(p \land q) \to r$, $p \to \neg r$

(h) $\neg(p \to \neg(p \to q))$, $r \to \neg p$, $q \leftrightarrow \neg r$

(i) $p \to (p \to q)$, $(q \lor r) \to p$, $r \to (p \lor q)$

(j) $r \to (p \land \neg q)$, $\neg r \to (\neg p \land q)$, $p \leftrightarrow q$

(k) $\neg(p \lor \neg r)$, $(q \lor p) \land (r \to s)$, $(q \land s) \leftrightarrow \neg r$

(l) $p \to (r \lor q)$, $p \land \neg t$, $(\neg t \land \neg s) \to \neg p$, $\neg s \to (q \leftrightarrow \neg r)$

2. Sea Γ un conjunto de fórmulas en las que sólo aparecen las letras proposicionales p, q, r y s. Si las únicas asignaciones que satisfacen Γ son

p	q	r	s
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

¿cuáles de las las siguientes fórmulas son consecuencia de Γ?

(a) p

(b) $p \land q$

(c) $p \land \neg p$

(d) $r \to s$

(e) $p \lor s$

(f) $r \leftrightarrow \neg p$

(g) $s \to (s \lor q)$

(h) $(r \land s) \to p$

3. Determine si los argumentos siguientes son correctos o no. Si un argumento es incorrecto, halle alguna asignación que lo muestre.

(a) $p \to q$, $p \to \neg q$ / $\neg p$

(b) $p \to q$, $p \lor q$ / q

(c) $p \to \neg q$, $p \land q$ / r

(d) $p \lor q$, $\neg p \lor \neg q$ / $p \leftrightarrow \neg q$

(e) $p \leftrightarrow \neg q$, $p \to r$ / $r \lor q$

(f) $p \leftrightarrow \neg q$, $p \to r$ / $r \lor q$

(g) $(p \land q) \leftrightarrow r$, $\neg r$ / $\neg p \land \neg q$

(h) $\neg(p \land q \land r)$, $(p \land r) \lor (q \land r)$ / $p \to \neg q$

(i) $q \to (r \lor p)$, $p \leftrightarrow \neg(q \land s)$ / $q \leftrightarrow (r \lor s)$

(j) $(p \lor q) \to r$, $r \to (p \lor s)$ / $q \to (\neg p \to s)$

4. Determine si los argumentos siguientes son correctos o no. Si un argumento es incorrecto, halle alguna asignación que lo muestre.

(a) $(p \lor r) \to \neg p$, $r \to \neg p$, $q \to \neg p$ / $\neg p$

(e) $p \to (q \lor r)$, $s \lor \neg r$, $q \to s$ / $p \to s$

(b) $\begin{array}{l} (p \to q) \vee (r \to s) \\ \neg p \to p \\ \neg r \to r \\ \hline q \vee s \end{array}$

(c) $\begin{array}{l} p \to (q \vee r) \\ r \to s \\ \neg q \vee s \\ \hline \neg(p \wedge \neg s) \end{array}$

(d) $\begin{array}{l} (p \wedge q) \to r \\ (\neg p \wedge \neg q) \to s \\ p \leftrightarrow q \\ \hline r \vee s \end{array}$

(f) $\begin{array}{l} (\neg q \wedge \neg r) \to \neg p \\ p \to q \\ p \leftrightarrow r \\ \hline q \vee r \end{array}$

(g) $\begin{array}{l} p \to (p \to q) \\ (q \vee r) \to p \\ r \to (p \vee q) \\ \hline q \end{array}$

(h) $\begin{array}{l} (p \wedge \neg q) \to \neg r \\ (\neg p \wedge q) \to s \\ \neg p \vee \neg q \\ t \to (r \wedge \neg s) \\ \hline \neg t \end{array}$

5. Para cada uno de los apartados siguientes encuentre una fórmula α que lo haga verdadero. (No es necesario que las fórmulas tengan más de dos conectivas, incluyendo a la negación.)

(a) $\{\alpha, (p \to q)\} \models (p \to r)$ y $\alpha \not\models p \to r$.
(b) $\{\alpha, (p \vee \neg q)\} \models \neg p$ y $\{\alpha, (q \to r)\} \models r$.
(c) $\{\alpha, (p \to q)\} \models \neg p$ y $\alpha \models q \to r$.
(d) $\{\alpha, (p \to q)\} \models \neg\alpha$ y $\alpha \not\models q$.
(e) $\{\alpha, p\} \models q$ y $\alpha \models p \wedge \neg q$.
(f) $\{\alpha, (p \to r), (q \to r)\} \models r$, pero $\alpha \not\models p$ y $\alpha \not\models q$.

6. Demuestre que para cualesquiera fórmulas α, β y γ:

(a) $\{(\alpha \vee \beta), \neg\alpha\} \models \beta$.
(b) $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$ sii $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ es una tautología.
(c) $\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \models \alpha \to \gamma$.

7. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas Γ y toda fórmula α:

(a) Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \alpha$, entonces $\Gamma \models \alpha$.
(b) Γ es insatisfacible sii existe β tal que $\Gamma \models \beta \wedge \neg\beta$.
(c) Si $\Gamma \cup \{\beta\}$ y $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ son insatisfacibles, entonces Γ es insatisfacible.
(d) Si $\Gamma \models \alpha \to \beta$ y $\Gamma \models \neg\alpha \to \beta$, entonces $\Gamma \models \beta$.

8. Justifique la proposición 9.7.

9. Para cada uno de los enunciados siguientes indique si es verdadero o falso para todas las fórmulas y para cualquier conjunto de fórmulas. Si es verdadero, justifíquelo. Si es falso, encuentre un ejemplo que lo muestre.

(a) Si $\Gamma \not\models \alpha$, entonces $\Gamma \models \neg\alpha$.
(b) Si $\Gamma \models \neg\alpha$, entonces $\Gamma \not\models \alpha$.
(c) Si $\Gamma \not\models \alpha$, entonces α es contingente.
(d) $\alpha \models \beta$ si y sólo si el conjunto de fórmulas $\{\neg\alpha, \beta\}$ es insatisfacible.
(e) Si $\alpha \models \beta$ y $\alpha \models \neg\beta$, entonces $\neg\alpha$ es una tautología.
(f) Si α es una tautología y β una fórmula contingente, $\alpha \not\models \beta$.
(g) Si α es una fórmula contingente y $\alpha \models \beta$, entonces β no es una contradicción.
(h) Si $\Gamma \models \alpha$, entonces $\Gamma \models \alpha \vee \beta$.
(i) Si $\beta \models \alpha$ y $\gamma \models \delta$., entonces $\beta \vee \gamma \models \alpha \vee \delta$.
(j) Si $\beta \wedge \gamma \models \alpha$, entonces $\beta \models \alpha$ y $\gamma \models \alpha$.
(k) Si $\alpha \vee \beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$.
(l) Si $\alpha \models \beta \vee \gamma$, entonces $\alpha \models \beta$ o $\alpha \models \gamma$.
(m) Si $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción, entonces $\alpha \models \neg\beta$.

CAPÍTULO 10

FORMAS NORMALES

1. De tablas de verdad a fórmulas

En los capítulos anteriores, las tablas de verdad siempre han aparecido ligadas a fórmulas que se consideraban dadas y, de hecho, el concepto que introdujimos fue el de tabla de verdad de una fórmula. Este concepto puede generalizarse del siguiente modo: si P es un conjunto finito no vacío de letras proposicionales, una **tabla de verdad** para P es una tabla (en rigor, una función) que hace corresponder un valor de verdad a cada una de las posibles asignaciones de valores de verdad a las letras proposicionales de P. En este capítulo, una tabla de verdad no es nada más que una tabla de verdad para un conjunto de letras proposicionales.

La pregunta que nos hacemos ahora es si para toda posible tabla de verdad para un conjunto finito no vacío P de letras proposicionales existe una fórmula construida con las letras de P que tiene esa tabla de verdad. La respuesta a esta pregunta es fundamental para valorar la capacidad expresiva del lenguaje de la lógica proposicional. La información contenida en una tabla de verdad se expresa en el lenguaje mediante una cualquiera de las fórmulas que tienen esa tabla de verdad, de modo que el hecho de que no existan tales fórmulas significa que la información de esa tabla no puede ser expresada en el lenguaje. Por ejemplo, si elimináramos la negación de entre nuestras conectivas, no sería posible expresar lo que ahora expresamos con su ayuda o, dicho con más precisión, no existiría ninguna fórmula con la tabla de verdad que tiene la negación de una letra proposicional. Si prescindiéramos de la negación perderíamos capacidad expresiva, pero no por el mero hecho de tener una conectiva menos, sino porque en el lenguaje sin negación no podríamos expresar lo que ahora expresamos con la negación. Además, si mostramos que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, habremos mostrado también que la introducción de conectivas nuevas no puede aumentar la capacidad expresiva de nuestro lenguaje. En efecto, si introdujéramos nuevas conectivas tendríamos nuevas fórmulas, pero en nuestro lenguaje existirán fórmulas en las que no aparecen las nuevas conectivas y que serán lógicamente equivalentes a las que usan las nuevas conectivas porque tendrán las mismas tablas de verdad que ellas.

Vamos a mostrar que para toda tabla de verdad para un conjunto finito P de letras proposicionales existe una fórmula construida con las letras de P que tiene dicha tabla de verdad. Si a todas las asignaciones de la tabla dada les corresponde el valor V (o a todas les corresponde el valor F), entonces no hay ningún problema: cualquier tautología (o cualquier contradicción) construida con las letras proposicionales de P tiene esa tabla de verdad. Cuando la tabla dada es la que tendría una fórmula contigente, es decir, cuando hay alguna asignación a la que le corresponde el valor V y alguna a la que le corresponde el valor F, podemos elegir entre dos métodos diferentes, aunque muy relacionados, para construir una fórmula que tiene la tabla dada. Nos ayudaremos de un ejemplo para explicar los dos métodos. Consideremos la tabla de verdad

p	q	r	
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

y veamos que existe una fórmula con las letras p, q y r que tiene precisamente esta tabla de verdad.

Antes de explicar los dos métodos, debemos observar que, por decirlo de algún modo, una asignación concreta puede ser descrita mediante una fórmula. Es evidente, por ejemplo, que para toda asignación v,

$$v(p \land q \land \neg r) = V \quad \text{sii} \quad v(p) = V \text{ y } v(q) = V \text{ y } v(r) = F.$$

Así, la fórmula

$$p \land q \land \neg r$$

describe la segunda asignación de la tabla en el sentido de que esta asignación es la única que la hace verdadera.

En general, dada una asignación v para un número finito de letras proposicionales, la conjunción de las letras a las que v asigna el valor V con la negación de cada una de las letras a las que v asigna el valor F es una fórmula que sólo es verdadera con la asignación v. Para facilitar la exposición, diremos que la fórmula obtenida de este modo describe la asignación v.

MÉTODO 1

Comenzamos obteniendo las fórmulas que describen las asignaciones que deben hacer verdadera a la fórmula que buscamos (las tres primeras, la quinta y la séptima de la tabla que nos sirve de ejemplo). Puesto que cada una de estas fórmulas sólo es verdadera con la asignación que describe, la disyunción de las cinco fórmulas sólo será verdadera con las cinco asignaciones que describen. En otras palabras, una asignación hará verdadera a esta disyunción si y sólo si es alguna de las cinco asignaciones descritas por las fórmulas que la componen. En definitiva, la disyunción

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

tiene la tabla de verdad dada.

Este procedimiento puede ser generalizado del siguiente modo: obtenemos en primer lugar las fórmulas que describen las asignaciones que deben hacer verdadera a la fórmula buscada (tales asignaciones existen, puesto que suponemos que se trata de la tabla de verdad de una fórmula contingente), y a continución formamos la disyunción de todas estas fórmulas. La disyunción así obtenida tiene la tabla de verdad dada.

MÉTODO 2

Tal como acabamos de explicar, la disyunción de las fórmulas que describen las asignaciones cuarta, sexta y octava de nuestro ejemplo sólo es verdadera con dichas asignaciones. Más concretamente, la fórmula

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

toma el valor V con las asignaciones de la tabla a las que corresponde el valor F, y el valor F con las asignaciones a las que corresponde el valor V. En otras palabras, la tabla de verdad de esta disyunción es justamente la que tiene la negación de la fórmula que buscamos y, por tanto, su negación,

$$\neg((p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)),$$

tiene precisamente la tabla de verdad dada.

Este procedimiento puede generalizarse de esta manera: se aplica el método 1 para obtener en primer lugar una fórmula cuya tabla de verdad sea la que tendría la negación de la fórmula buscada y depués se niega la fórmula así obtenida. Obsérvese que siempre podrá aplicarse el método 1, ya que suponemos la existencia de asignaciones que hacen falsa a la fórmula buscada y, por tanto, verdadera a su negación.

2. Formas normales

Un aspecto muy interesante de los dos métodos de obtención de una fórmula que tiene una tabla de verdad dada es que las fórmulas a las que se llega hacen explícitas las asignaciones con las que son verdaderas. Como hemos visto, la fórmula que se obtiene al aplicar el primer método es una disyunción de conjunciones que describen las asignaciones que hacen ver dadera a dicha fórmula, y la que se obtiene al aplicar el segundo método es la negación de una disyunción de conjunciones que describen las asignaciones que hacen falsa a la fórmula. Si en lugar de darnos la tabla de verdad nos dieran solamente una fórmula de alguno de estos dos tipos, no necesitaríamos hacer su tabla de verdad para saber qué asignaciones la hacen verdadera y qué asignaciones la hacen falsa. Compárense las fórmulas que hemos obtenido al aplicar los dos métodos con la fórmula

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r$$

que tiene la misma tabla de verdad. Este ejemplo sugiere que, dada una fórmula contingente cualquiera, siempre será posible encontrar otra fórmula lógicamente equivalente a ella que hace explícita su tabla de verdad.

Con el propósito de establecer con precisión este hecho, vamos a definir a continuación la estructura de las fórmulas que se obtienen por el método 1 y también la estructura dual que, como veremos, está muy relacionada con el método 2.

Supongamos que P es un conjunto finito de letras proposicionales. Una fórmula está en **forma normal disyuntiva completa** con respecto a las letras de P si es de la forma

$$\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n,$$

donde cada α_i $(1 \leq i \leq n)$ es una conjunción en la que cada letra proposicional de P aparece una sola vez, ya sea afirmada, ya sea negada.

Una fórmula está en **forma normal conjuntiva completa** con respecto a las letras de P si es de la forma

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n,$$

donde cada α_i $(1 \leq i \leq n)$ es una disyunción en la que cada letra proposicional de P aparece una sola vez, afirmada o negada.

Hay dos casos particulares de estas definiciones que es interesante mencionar. Una conjunción de todas las letras proposicionales de P afirmadas o negadas está en forma normal disyuntiva completa, porque tiene la forma apropiada para el caso $n = 1$. Del mismo modo, una disyunción de todas las letras proposicionales de P afirmadas o negadas está en forma normal conjuntiva completa. Así,

$$p \wedge q \wedge \neg r$$

está en forma normal disyuntiva completa y

$$p \vee q \vee \neg r$$

en forma normal conjuntiva completa, en ambos casos con respecto a $\{p,q,r\}$. Por el mismo motivo, las fórmulas p y $\neg p$ están tanto en forma normal disyuntiva completa como en forma normal conjuntiva completa con respecto a $\{p\}$.

Las fórmulas que se obtienen al aplicar el método 1 están en forma normal disyuntiva completa y las que se obtienen al aplicar el método 2 son negaciones de fórmulas en forma normal disyuntiva completa (en ambos casos con respecto a las letras que aparecen en la tabla de verdad), pero, como veremos a continuación, las fórmulas obtenidas por el método 2 se pueden transformar fácilmente en otras equivalentes que están en forma normal conjuntiva completa para las mismas letras.

PROPOSICIÓN 10.1. *Toda fórmula contingente α es lógicamente equivalente a una fórmula en forma normal disyuntiva completa con respecto a letras de α.*

DEMOSTRACIÓN. Sea α una fórmula contingente cualquiera y β la fórmula obtenida al aplicar el método 1 a la tabla de verdad de α. Por construcción, β está en forma normal disyuntiva completa con respecto a las letras de α y además es lógicamente equivalente a β, ya que tiene su misma tabla de verdad. □

PROPOSICIÓN 10.2. *Toda fórmula contingente α equivale lógicamente a una fórmula en forma normal conjuntiva completa con respecto a las letra de α.*

DEMOSTRACIÓN. Sea α una fórmula contingente cualquiera y β la fórmula obtenida al aplicar el método 2 a la tabla de verdad de β. Por construcción, β es lógicamente equivalente a α y es la negación de una fórmula en forma normal disyuntiva completa con respecto a las letras de α. Si aplicamos las leyes de De Morgan y la ley de la doble negación (junto con el principio de sustitución de fórmulas equivalentes) a β, obtendremos una fórmula en forma normal conjuntiva completa con respecto a las letras de β. Por la transitividad de la equivalencia lógica, la fórmula así obtenida equivale lógicamente a α y está en forma normal conjuntiva completa con respecto a las letras de α. □

Un ejemplo ayudará a entender cómo, dada una fórmula contingente α, podemos obtener una fórmula lógicamente equivalente a α que esté en forma normal conjuntiva completa con respecto a las letras proposicionales de α. Supongamos que la fórmula dada es $(\neg p \vee \neg q) \to r$ cuya tabla de verdad es precisamente la que nos ha servido de ejemplo en la sección anterior. Como se recordara, la fórmula que obtuvimos al aplicar el método 2 a la tabla de verdad de $(\neg p \vee \neg q) \to r$ fue

$$\neg((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)),$$

que es la negación de una fórmula en forma normal disyuntiva completa con respecto a p, q y r. Si aplicamos las leyes de De Morgan obtenemos

$$\neg(p \wedge q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r).$$

Aplicando de nuevo la leyes de De Morgan y simplificando las dobles negaciones llegamos a la fórmula

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r),$$

que es lógicamente equivalente $(\neg p \vee \neg q) \to r$ y está en forma normal conjuntiva completa con respecto a p, q y r.

GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE FORMA NORMAL

Las proposiciones anteriores se cumplen para fórmulas contingentes, pero no para fórmulas cualesquiera. No existen contradicciones que estén en forma normal disyuntiva completa ni tautologías que estén en forma normal conjuntiva completa. Cuando estos conceptos se generalizan del modo en que lo hacemos a continuación, las proposiciones anteriores valen para fórmulas cualesquiera.

Llamaremos **literal** a una letra proposicional o la negación de una letra proposicional. Una fórmula está en **forma normal disyuntiva** si es de la forma

$$\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n,$$

donde cada α_i $(1 \leq i \leq n)$ es un literal o una conjunción de literales. Obsérvese que los literales y las conjunciones de literales están en forma normal disyuntiva, puesto que tienen la forma indicada para el caso $n = 1$.

Una fórmula está en **forma normal conjuntiva** si es de la forma

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n,$$

donde cada α_i $(1 \leq i \leq n)$ es un literal o una disyunción de literales. En particular, puede suceder que $n = 1$, de modo que los literales y las disyunciones de literales también están en forma normal conjuntiva.

EJEMPLOS

1. La fórmula

   $$p \wedge \neg q \wedge r$$

   está en forma normal conjuntiva porque es la conjunción de tres literales, pero también está en forma normal disyuntiva porque tiene esta forma para el caso $n = 1$. Por la misma razón, la contradicción $p \wedge \neg p$ está en forma normal disyuntiva y también conyuntiva. Las fórmulas

   $$(r \wedge \neg q) \vee p \qquad \text{y} \qquad (p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q)$$

están en forma normal disyuntiva, pero no en conjuntiva y tampoco son formas normales disyuntivas completas.

2. Análogamente, la fórmula

$$p \lor \neg q \lor r$$

está tanto en forma normal disyuntiva como en forma normal conjuntiva, la tautología $p \lor \neg p$ está en forma normal conjuntiva y disyuntiva, y las conjunciones

$$(r \lor \neg q) \land p \qquad \text{y} \qquad (p \lor \neg r) \land (r \lor \neg q)$$

están en forma normal conjuntiva, pero no en disyuntiva.

PROPOSICIÓN 10.3. *Toda fórmula α es lógicamente equivalente a una fórmula en forma normal conjuntiva y a una fórmula en forma normal disyuntiva construidas ambas con las mismas letras que α.*

DEMOSTRACIÓN. Si α es una fórmula contingente, las proposiciones 10.1 y 10.2 justifican lo que deseamos probar, pues toda fórmula en forma normal conjuntiva (o disyuntiva) completa lo está en forma normal conjuntiva (o disyuntiva). Supongamos ahora que las letras proposicionales de α son $p_1, \ldots, p_n$. Si α es una tautología, entonces $(p_1 \lor \neg p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n)$ equivale lógicamente a α (pues $p_1 \lor \neg p_1$ es una tautología) y está tanto en forma normal conjuntiva como en forma normal disyuntiva. Si α es una contradicción, $(p_1 \land \neg p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n)$ tiene cualquiera de las dos formas normales y equivale lógicamente a α. □

3. Sistemas completos de conectivas

La pregunta sobre el efecto que puede tener en la capacidad expresiva la eliminación de alguna de las conectivas del lenguaje ya ha sido parcialmente respondida. En las dos secciones anteriores hemos visto que la negación, la conjunción y la disyunción bastan para obtener fórmulas lógicamente equivalentes a cualquier fórmula dada. Esto significa que podemos prescindir del condicional y del bicondicional sin perder capacidad expresiva; pero no es éste el principal interés de los resultados expuestos en dichas secciones, porque ya sabíamos que podíamos prescindir de esas conectivas. La proposición 8.2 del capítulo 8 afirma que toda fórmula equivale lógicamente a otra que tiene las mismas letras proposicionales, pero sólo dos conectivas, concretamente las conectivas de alguno de estos tres pares: 1) negación y conjunción, 2) negación y disyunción, y 3) negación y condicional). Así, cualquiera de estos tres pares de conectivas basta para expresar todo lo que expresamos con la cinco conectivas que posee nuestro lenguaje.

Para facilitar la formulación de los resultados que presentamos en esta sección vamos a llamar **sistema completo de conectivas** a un conjunto de conectivas tal que toda fórmula α es lógicamente equivalente a otra construida exclusivamente con las conectivas de ese conjunto y que tiene las mismas letras proposicionales que α. La proposición 8.2 del capítulo 8 puede enunciarse ahora del siguiente modo:

PROPOSICIÓN 10.4.

(1) *La negación y la conjunción constituyen un sistema completo de conectivas.*

(2) *La negación y la disyunción constituyen un sistema completo de conectivas.*

(3) *La negación y el condicional constituyen un sistema completo de conectivas.*

La justificación de que un sistema dado de conectivas no es completo consiste en hallar una fórmula que no sea equivalente a ninguna otra construida sólo con las conectivas del sistema y con las letras proposicionales de dicha fórmula. Si pensamos el problema desde el punto de vista de las tablas de verdad, la demostración consiste entonces en determinar una posible tabla de verdad y mostrar que ninguna fórmula construida sólo con las conectivas del sistema tiene esa tabla de verdad. Por supuesto, ambos enfoques del problema son equivalentes: no hay ninguna diferencia sustancial entre hallar una fórmula y hallar una tabla de verdad, y tampoco la hay entre mostrar que la fórmula hallada no es equivalente a ninguna que cumple ciertas condiciones y mostrar que ninguna fórmula que cumple esas mismas condiciones tiene la tabla de verdad hallada.

PROPOSICIÓN 10.5. *La disyunción, la conjunción el condicional y el bicondicional no constituyen un sistema completo de conectivas.*

DEMOSTRACIÓN. Esta proposición es una consecuencia inmediata del siguiente hecho

> no existe ninguna fórmula construida sólo con la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional que sea lógicamente equivalente a $\neg p$

cuya prueba dejamos como ejercicio. □

PROPOSICIÓN 10.6. *La negación y el bicondicional no constituyen un sistema completo de conectivas.*

DEMOSTRACIÓN. Para facilitar la exposición, llamaremos «reducido» al lenguaje cuyas únicas letras proposicionales son p y q, y cuyas únicas conectivas son la negación y el bicondicional. Vamos a demostar que ninguna fórmula del lenguaje reducido es lógicamente equivalente a $p \wedge q$.

La tabla de verdad de $p \wedge q$ tiene la propiedad de que tres asignaciones atribuyen un mismo valor y la restante atribuye el otro. Provisionalmente, diremos que las tablas de verdad que *no* tienen esta propiedad son de tipo par y a las fórmulas del lenguaje reducido que tienen sólo una letra proposicional o cuya tabla de verdad es de tipo par las llamaremos «inaceptables». Observemos antes de seguir adelante que las fórmulas inaceptables no pueden ser lógicamente equivalentes a $p \wedge q$, ya que o bien sólo contienen una letra proposicional o bien su tabla de verdad es diferente de la de $p \wedge q$.

Vamos a demostar aplicando el primer principio de inducción para fórmulas que toda fórmula del lenguaje reducido es inaceptable. Es evidente que las fórmulas atómicas del lenguaje (las letras proposicionales) tienen esta propiedad.

Supongamos que α es inaceptable (hipótesis inductiva) y veamos que $\neg\alpha$ también lo es. Si $\neg\alpha$ tiene una sola letra proposicional, no hay nada que justificar; si tiene las dos letras, entonces también las tiene α y, dado que α es inaceptable, su tabla de verdad es de tipo par. Puesto que una fórmula y su negación tienen tablas del mismo tipo, la tabla de verdad de $\neg\alpha$ también es de tipo par y, por tanto, $\neg\alpha$ es inaceptable.

Supongamos que α y β son fórmulas inaceptables (hipótesis inductiva) y veamos que $\alpha \leftrightarrow \beta$ también lo es. Si $\alpha \leftrightarrow \beta$ sólo tiene una letra proposicional no es necesario justificar nada. Imaginemos que en $\alpha \leftrightarrow \beta$ aparecen las dos letras proposicionales (aunque posiblemente una en α y otra en β). La siguiente tabla puede ayudarnos a visualizar la situación:

p	q	α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Observemos ahora que no puede suceder que tres de las cuatro asignaciones atribuyan un mismo valor a α y la restante le atribuya el otro. En efecto, si α es una contradicción o una tautología, las cuatro asignaciones le atribuyen el mismo valor. Si α es contingente y sólo tienen una letra proposicional, dos asignaciones le asignan un valor y dos le asignan el otro; si es contingente y tiene las dos letras proposicionales, entonces su tabla de verdad es de tipo par (por hipótesis inductiva). Naturalmente, lo mismo vale para β. Ahora bien, un examen sencillo de todas las posiblidades muestra que sólo puede suceder que $\alpha \leftrightarrow \beta$ tome un valor de verdad con tres asignaciones y la restante le atribuya el otro en el caso de que suceda lo mismo con α o con β. Así, la tabla de verdad de $\alpha \leftrightarrow \beta$ es de tipo par y, por tanto, $\alpha \leftrightarrow \beta$ es inaceptable.

Este argumento justifica que toda fórmula del lenguaje reducido tiene sólo una letra proposicional o tiene una tabla de verdad de tipo par. Ninguna fórmula que tenga una de estas características puede ser equivalente a $p \wedge q$. Concluimos entonces que la negación y el bicondicional no constituyen un sistema completo de conectivas. □

Ninguna de las conectivas que hemos introducido hasta el momento constituye por sí misma un sistema completo, pero estas conectivas no son las únicas posibles. Las conectivas son símbolos del lenguaje que se intepretan como funciones veritativas y, si lo deseamos, podemos introducir una conectiva diferente para cada una de las posibles funciones veritativas. En particular, a cada conectiva binaria le corresponde una función veritativa binaria (esto es, una función que asigna un valor de verdad a cada par de valores de verdad). En el siguiente cuadro pueden verse las 16 posibles funciones binarias:

α	β	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Las funciones cuyos números son 2, 5, 7 y 8 corresponden, respectivamente, a la disyunción, el condicional, el bicondicional y la conjunción. Para cada una de las restantes podríamos, si lo desearamos, introducir un símbolo nuevo que la representase. Por ejemplo, la función número 10 corresponde a la llamada **disyunción excluyente** que se representa en ocasiones con el símbolo: $\veebar$. Así, podríamos ampliar el lenguaje con este nuevo símbolo para construir fórmulas de la forma $(\alpha \veebar \beta)$ cuyas condiciones de verdad vendrían dadas por la siguiente condición: para toda asignación v, v hace verdadera a $(\alpha \veebar \beta)$ si y sólo si v hace verdadera α o a β, pero no a ambas.

Entre las posibles conectivas binarias se encuentran las que se conocen como **barra de Sheffer** cuyo símbolo es «|», y **flecha** que se simboliza con «↓». A la barra de Sheffer se la llama también *negación alternativa* o *incompatibilidad*, y a la flecha *negación conjunta*. Las expresiones $(\alpha \mid \beta)$ y $(\alpha \downarrow \beta)$ se leen como «ni α ni β» y «no α o no β», respectivamente. Las tablas de verdad de estas conectivas son, como sugieren sus nombres, las correspondientes a la negación de la disyunción y a la negación de la conjunción (las funciones novena y decimoquinta). Explícitamente:

α	β	$(\alpha \mid \beta)$	$(\alpha \downarrow \beta)$
V	V	F	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	V

El interés de estas dos conectivas reside en que cada una de ellas constituye por sí misma un sistema completo de conectivas. Es más, son las únicas conectivas binarias que tienen esta propiedad.

PROPOSICIÓN 10.7. *La barra de Sheffer y la flecha constituyen cada una de ellas un sistema completo de conectivas.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que la barra de Sheffer constituye un sistema completo de conectivas. Puesto que la negación y la conjunción también constituyen un sistema completo, lo único que se necesita probar es que toda fórmula construida sólo con estas conectivas es equivalente a otra formada con las mismas letras proposicionales y cuya única conectiva es la barra de Sheffer. Aplicando el método de las tablas de verdad, es fácil comprobar que se cumplen las siguientes equivalencias:

$$\neg\alpha \equiv (\alpha \mid \alpha)$$
$$\alpha \wedge \beta \equiv (\alpha \mid \beta) \mid (\alpha \mid \beta).$$

Ahora, es fácil ver que, dada una fórmula cualquiera φ cuyas únicas conectivas son la negación y la conjunción, podemos obtener otra equivalente a φ cuya única conectiva es la barra de Sheffer por el procedimiento de aplicar las equivalencias anteriores a cada de una de las subórmulas de φ de las formas $\neg\alpha$ y $\alpha \wedge \beta$. Después de efectuar un número finito de transformaciones se llega a una fórmula cuya única conectiva es la barra de Sheffer y que, por el principio de sustitución de subfórmulas y la transitividad de la equivalencia lógica, es equivalente a φ.

La justificación de que la flecha constituye un sistema completo se hace del mismo modo que la anterior observando que

$$\neg\alpha \equiv (\alpha \downarrow \alpha)$$
$$\alpha \wedge \beta \equiv (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta).$$

□

¿Por qué usamos cinco conectivas si basta con una (o dos, si queremos mantener las habituales)? La razón es sencilla. Técnicamente, lo más cómodo

es tener el menor número posible de conectivas, pero no sucede lo mismo desde el punto de vista del uso del lenguaje formal. Por ejemplo, las fórmulas

$$p \leftrightarrow q$$
$$\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$$

son equivalentes, es decir, expresan lo mismo, pero es obvio que entendemos con más facilidad la primera que la segunda. De este modo, tener un mayor número de conectivas no aumenta la capacidad expresiva del lenguaje, pero sí sus recursos expresivos, y son precisamente estos recursos los que facilitan la comprensión intuitiva de un lenguaje.

4. Ejercicios

1. Para cada una de las tablas que, con cierta informalidad, se describen a continuación, encuentre una fórmula α en forma normal disyuntiva completa para las letras proposicionales p, q y r que tenga esa tabla de verdad:

   (a) α es falsa sii como máximo dos de las letras son verdaderas.
   (b) α es verdadera sii p es verdadera y q o r son falsas.
   (c) α es falsa sii como mínimo dos de las letras son verdaderas.
   (d) α es verdadera sii una de las letras y sólo una es falsa.
   (e) α es verdadera sii alguna de las letras es falsa y alguna es verdadera.

2. Obtenga las forma normales conjuntivas completas para las letras proposicionales p, q y r correspondientes a las tablas de verdad descritas en el ejercicio anterior.

3. Obtenga la forma normal disyuntiva completa de una tautología y la forma normal conjuntiva completa de una contradicción suponiendo que ambas fórmulas tienen exactamente tres letras proposicionales.

4. Para cada una de las fórmulas siguientes obtenga una fórmula equivalente en forma normal disyuntiva completa y otra en forma normal conjuntiva completa:

   (a) $p \to (q \wedge r)$.
   (b) $\neg(p \to q) \vee \neg r$.
   (c) $(p \leftrightarrow q) \to r$.
   (d) $\neg(p \leftrightarrow r) \to (\neg q \vee p)$.
   (e) $\neg p \wedge (q \vee \neg(p \wedge r))$.

5. Muestre que la negación de una fórmula en forma normal conjuntiva completa con respecto a las letras de P equivale lógicamente a una fórmula en forma normal disyuntiva completa con respecto a las mismas letras.

6. Sea α una fórmula en forma normal disyuntiva completa con respecto a un conjunto P de letras proposicionales. Muestre que α no es una contradicción.

7. Demuestre por inducción que ninguna fórmula construida sólo con la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional es lógicamente equivalente a $\neg p$. Justifique después el siguiente corolario: ninguna fórmula construida sólo con la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional es una contradicción.

8. Muestre que la negación y la disyunción excluyente no constituyen un sistema completo de conectivas.

9. Obtenga fórmulas equivalentes a $p \vee q$, $p \rightarrow q$ y $p \leftrightarrow q$ cuya única conectiva sea la flecha.

10. Obtenga fórmulas equivalentes a $p \vee q$, $p \rightarrow q$ y $p \leftrightarrow q$ cuya única conectiva sea la barra de Sheffer.

CAPÍTULO 11

LÓGICA PROPOSICIONAL Y LENGUAJE NATURAL

1. Simbolización

Simbolizar un enunciado E de una lengua natural en un lenguaje proposicional consiste en hallar una fórmula α de ese lenguaje tal que

1. cuando en α se reemplazan las letras proposicionales por ciertos enunciados de la lengua en cuestión y las conectivas se interpretan canónicamente (es decir, se leen y se entienden tal como lo hacemos en lógica proposicional) se obtiene un enunciado cuyas condiciones de verdad son, en el caso ideal, las mismas que las de E, y
2. la estructura de α refleja en lo posible la estructura sintáctica de E.

Llamaremos *interpretaciones de* α a los enunciados que se obtienen del modo indicado en la condición (1). Cuando interpretamos, en este sentido, una fórmula α asociamos a las letras proposicionales de α los enunciados que consideramos oportuno. Naturalmente, cuando cambiamos los enunciados asociados a las letras proposicionales obtenemos interpretaciones diferentes de la misma fórmula. Por ejemplo, los enunciados

si Dios es todopoderoso, entonces Dios puede hacer milagros,
si Luis tiene 18 años, entonces Luis puede votar

son dos posibles interpretaciones de $p \rightarrow q$.

Aunque la interpretación de las letras proposicionales sea la adecuada, E_α no tiene por qué coincidir con el enunciado E que pretendemos simbolizar mediante α. La ventaja de E_α comparado con E es la precisión: por un lado, la estructura sintáctica de E_α está perfectamente determinada porque reproduce con exactitud la de α y, por otro lado, no existe ninguna ambigüedad en el significado de las lecturas canónicas de las conectivas porque se supone que la semántica de estas expresiones es la misma que la de las conectivas correspondientes del lenguaje proposicional. Así, E_α puede verse como una precisión de E y, en general, la simbolización como una tarea de análisis y precisión de los enunciados del lenguaje natural. Lo ideal sería que las condiciones de verdad

de E_α coincidieran con las de E, pero desgraciadamente con la simbolización pueden perderse aspectos importantes del significado de E (como tendremos ocasión de ver), de modo que sólo en un caso ideal las condiciones de verdad de E y de E_α serán exactamente las mismas. A pesar de este componente de vaguedad, esta condición es esencial para descartar como inadecuadas ciertas simbolizaciones.

También la segunda condición es imprecisa. Sin embargo, es obvio que el cumplimiento de la primera no es suficiente para considerar que una fórmula α simboliza a un enunciado E. Un ejemplo bastará para comprender por qué. Las fórmulas

$$\neg\neg\neg\neg p, \qquad p \vee p \vee p \qquad \text{y} \qquad p \vee (q \wedge \neg q)$$

son lógicamente equivalentes a p, pero es evidente que no las consideraríamos simbolizaciones aceptables de un enunciado simple como, por ejemplo, «Leibniz nació en Leipzig». A pesar de su imprecisión, la segunda condición es necesaria para descartar simbolizaciones extravagantes de un enunciado que tiene una simbolización natural. De todas formas, es una condición que debe aplicarse con cierta flexibilidad.

No hay reglas para simbolizar. La estructura gramatical de un enunciado puede ayudarnos a simbolizarlo, pero no es un factor determinante. Hay enunciados que tienen la misma estructura sintáctica, pero no se simbolizan del mismo modo. Así, por ejemplo, «Antonio y Pedro se aburrieron en el cine» equivale a la conjunción «Antonio se aburrió en el cine y Pedro se aburrió en el cine», pero «Antonio y Pedro se comieron el pastel» no puede simbolizarse como una conjunción, porque no significa lo mismo que «Antonio se comió el pastel y Pedro se comió el pastel». Tampoco podemos dar reglas sencillas del tipo: tal partícula del lenguaje se simboliza siempre de tal modo. Por ejemplo, la partícula «y» se simboliza en ocasiones como una disyunción, hay casos en que la «o» debe simbolizarse como una conjunción y es frecuente usar un condicional del lenguaje natural con valor de bicondicional en contextos en que no cabe duda de que el otro condicional también se cumple. Los ejemplos más claros de los diferentes usos de «y» y «o» son enunciados que deben simbolizarse en los lenguajes de primer orden que estudiaremos más adelante, pero podemos hacernos una idea de la dificultad de dar una regla si observamos que la expresión «los hombres y las mujeres» no significa lo mismo que «los seres que son hombres y mujeres», sino lo mismo que «los seres que son hombres o mujeres». La mejor estrategia para simbolizar correctamente consiste en analizar con cuidado el enunciado para averiguar qué quiere decir y, una vez que lo hemos averiguado, pensar en cómo podemos expresar lo mismo con la única ayuda de la interpretación canónica de las conectivas.

Las oraciones de las que tiene sentido preguntarse si son verdaderas o falsas reciben el nombre de «enunciados». Las restantes oraciones, las que expresan preguntas, órdenes, ruegos, etc., carecen de valor de verdad y, por tanto, no tiene sentido simbolizarlas en un lenguaje formal cuyo supuesto básico es que toda fórmula es, una vez interpretada, verdadera o falsa.

No todos los enunciados compuestos pueden simbolizarse adecuadamente. Algunas de las partículas o expresiones del lenguaje que usamos para formar

enunciados compuestos a partir de enunciados más simples tienen una interesante propiedad: el valor de verdad del enunciado compuesto formado con su ayuda depende exclusivamente del valor de verdad de los enunciados que lo componen. No todas las expresiones del lenguaje que se usan para formar enunciados compuestos tienen esta propiedad o, como diremos en lo sucesivo, no todas las expresiones tienen un comportamiento veritativo-funcional. Una de ellas es la partícula causal «porque». Por ejemplo, la verdad o falsedad del enunciado

Luis fue a ver al médico porque se sentía enfermo

no depende sólo del valor de verdad de los enunciados simples que lo forman. El enunciado puede ser falso aunque sea verdad que Luis se sentía enfermo y fue a ver al médico. Más concretamente, el enunciado será falso si Luis no fue al médico porque se sentía enfermo, sino por alguna otra razón (tal vez porque quería pedirle que acudiera a su casa para visitar a uno de sus hijos). Sólo los enunciados compuestos con la ayuda de expresiones que se comportan veritativo-funcionalmente pueden simbolizarse adecuadamente. Recordemos que la característica esencial de las conectivas del lenguaje formal es la de comportarse veritativo-funcionalmente, de modo que no sería razonable esperar que una expresión que no tiene esta propiedad tenga una simbolización adecuada en el lenguaje formal de la lógica proposicional.

¿Hay en el lenguaje alguna expresión veritativo-funcional que no podamos simbolizar con la ayuda de las conectivas que tenemos? Como ya sabemos, la respuesta a esta pregunta es negativa. La semántica de cualquier expresión que se comporte veritativo-funcionalmente puede representarse mediante una tabla de verdad que nos dice cuál es el valor de verdad del enunciado compuesto en función del valor de los enunciados que lo componen. Ahora bien, en el capítulo anterior hemos demostrado que, dada cualquier tabla de verdad, hay una fórmula que tiene dicha tabla de verdad. Este hecho nos garantiza que cualquier expresión veritativo-funcional puede simbolizarse satisfactoriamente en lógica proposicional.

Para concluir esta sección analizaremos las conectivas una a una relacionándolas con gran parte de las expresiones del lenguaje que se simbolizan con su ayuda.

Negación

Usamos la negación del lenguaje formal para simbolizar las expresiones que en el lenguaje natural utilizamos para negar enunciados. Por ejemplo, tanto «Espriu no escribió *Campos de Castilla*» como «no es verdad que Espriu escribió *Campos de Castilla*» se simbolizan con $\neg p$. También pueden simbolizarse como negaciones enunciados cuya estructura gramatical es la de una afirmación, pero que tienen un sentido negativo. Por ejemplo, «George E. Moore era incapaz de mentir» puede simbolizarse con $\neg p$, donde p se interpreta como «George E. Moore era capaz de mentir».

Conjunción

La conjunción del lenguaje formal se emplea para simbolizar las expresiones veritativo-funcionales del lenguaje que usamos para afirmar que dos enunciados son verdaderos. El paradigma de este tipo de partículas es, por supuesto, la conjunción «y» cuando se usa para formar un enunciado a partir de otros dos como sucede, por ejemplo, en

Cervantes escribió *El Quijote* y Picasso pintó *Las Meninas*.

En ocasiones la conjunción «y» se usa para unir dos términos, como en

Cervantes escribió *El Quijote* y *La Galatea*.

También este enunciado puede simbolizarse con $p \wedge q$, pero al hacerlo así no debemos perder de vista que las letras proposicionales se interpretan como enunciados (no como términos) y, por tanto, lo que estamos haciendo es dar por supuesto que el enunciado anterior es una versión abreviada de

Cervantes escribió *El Quijote* y Cervantes escribió *La Galatea*.

La semántica de la conjunción se aproxima bastante a la de su correlato en el lenguaje natural (es decir, la que tiene la partícula «y»), pero no está claro que ambas semánticas puedan identificarse. Como hemos visto, la conjunción es conmutativa o, dicho con más precisión, $\alpha \wedge \beta$ es lógicamente equivalente a $\beta \wedge \alpha$. Sin embargo, no parece suceder lo mismo con su correlato del lenguaje, porque en ocasiones el orden de los enunciados sugiere cierta conexión causal que se manifiesta en el orden en que se enuncian: lo afirmado por el primero que se profiere acontece antes que lo afirmado por el segundo. Ningún hablante del castellano diría que los enunciados

escribió una novela y se hizo famoso,
se hizo famoso y escribió una novela

significan lo mismo. El primero sugiere que se hizo famoso debido al éxito de su novela, mientras que el segundo sugiere que aprovechó su fama (adquirida no importa cómo) para publicar una novela. El único modo que tenemos de simbolizar estos enunciados en lógica proposicional es mediante la fórmulas $p \wedge q$ y $p \wedge q$ que, como sabemos, son lógicamente equivalentes.

Las expresiones «pero», «aunque» y «sin embargo» pueden simbolizarse en algunos contextos mediante la conjunción. Consideremos, por ejemplo, los enunciados:

hacía buen tiempo, pero no salí a pasear,
aunque hacía buen tiempo, no salí a pasear,
hacía buen tiempo, sin embargo, no salí a pasear.

Es indudable que ninguno de ellos significa exactamente lo mismo que el enunciado

hacía buen tiempo y no salí a pasear,

porque, a diferencia de éste, sugieren que suelo salir a pasear los días que hace buen tiempo. La simbolización adecuada en lógica proposicional de todos estos enunciados es $p \wedge \neg q$, pero al hacerlo así debemos ser conscientes de que sólo estamos reflejando sus aspectos veritativo-funcionales.

Disyunción

La disyunción del lenguaje formal se emplea para simbolizar las expresiones veritativo-funcionales del lenguaje que usamos para afirmar que sucede al menos una de las dos alternativas tomadas en consideración. La partícula que solemos usar para hacer este tipo de afirmaciones es «o», pero no siempre está claro cómo debemos entender un enunciado disyuntivo del tipo «tal cosa o tal otra». En algunas ocasiones queremos decir que sucede al menos una de las dos alternativas. El antecedente del condicional

si Luisa sabe inglés o informática, puede conseguir el trabajo

es un ejemplo de enunciado disyuntivo donde no se excluye ninguna de las dos posibilidades: puede suceder que Luisa sepa tanto inglés como informática y no por ello será rechazada. La simbolización del antecedente del condicional y, en general, de los enunciado disyuntivos que *no excluyen* una de las dos alternativas es, naturalmente, $p \vee q$.

Hay ocasiones, como sucede en

Roma está en Francia o Roma está en Italia,

en que no pueden darse al mismo tiempo las dos alternativas. En los casos en que es posible que sucedan las dos alternativas y queremos afirmar que sólo es verdadera una de ellas lo indicamos explícitamente o usamos las expresiones «o... o» y «o bien... o bien», entre otras. Cuando decimos, por ejemplo,

iremos al cine o a al teatro, pero no a los dos sitios,
o hace frío o tengo fiebre

estamos *excluyendo* la posibilidad de que sean verdaderas al mismo tiempo las dos alternativas consideradas en cada caso. Así, un enunciado disyuntivo *excluyente* es verdadero si y sólo si es verdadero uno y sólo uno de los dos enunciados que lo componen.

En el lenguaje formal no disponemos de ningún símbolo para la disyunción excluyente, pero no lo necesitamos. La fórmula

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

simboliza el enunciado disyuntivo excluyente cuyos componentes son los enunciados asociados a p y a q. Los tres últimos enunciados que nos han servido de ejemplo pueden simbolizarse de este modo. La tabla de verdad de esta fórmula,

p	q	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

es precisamente la que tiene la disyunción excluyente, tal como hemos visto en el capítulo anterior.

Obsérvese que si las dos alternativas se excluyen lógicamente, como sucede por ejemplo, en el enunciado

Colón era genovés o Colón no era genovés,

carece de importancia el modo en que simbolizamos la disyunción, porque el resultado será esencialmente el mismo. Este hecho puede enunciarse con precisión del siguiente modo: si $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción, entonces

$$\alpha \vee \beta \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta).$$

Condicional

La verdad (con una asignación dada) de una fórmula condicional no indica la existencia de ningún tipo de relación entre el antecedente y el consecuente, lo único que indica es que no sucede que el antecedente es verdadero y el consecuente falso (con la asignación dada). No hay ninguna partícula del lenguaje que se use exclusivamente con esta finalidad, pero algunos usos de la expresión «si..., entonces» se aproximan bastante a él.

El hecho de que en lógica se consideren verdaderos los condicionales que tienen antecedente falso, puede resultar sorprendente porque, a primera vista, parece que nunca usamos la expresión «si..., entonces» de este modo. Un par de ejemplos bastarán para ver que no es así. Si sabemos que Kant nació en el siglo XVIII, aceptaremos con naturalidad la verdad de los siguientes enunciados

si Leibniz nació en el siglo XVI, entonces nació antes que Kant,
si Leibniz nació en el siglo XIX, entonces nació mas tarde que Kant.

Si observamos ahora ambos condicionales, veremos que el primero tiene antecedente falso y consecuente verdadero, mientras que el segundo tiene antecedente

y consecuente falsos. En general, se aceptan sin reparos como verdaderos los condicionales con antecedente falso que son consecuencia de alguna generalización que consideramos verdadera. Los condicionales anteriores se aceptan como verdaderos, porque son consecuencia de dos generalizaciones que consideramos verdaderas (suponiendo que sabemos en qué siglo nació Kant): todo el que nació el siglo XVI nació antes que Kant y todo el que nació el siglo XIX nació más tarde que Kant.

Expresiones como «es necesario» y «es suficiente» también pueden simbolizarse en ocasiones con ayuda del condicional. Por ejemplo, los enunciados

(1) para que un número sea par es suficiente que sea múltiplo de ocho,
(2) para que llueva es necesario que haya nubes

significan lo mismo, respectivamente, que los siguientes

(1′) si un número es múltiplo de ocho, entonces es par,
(2′) si llueve, entonces hay nubes

Es importante observar que 1) la condición suficiente aparece como antecedente, 2) la condición necesaria aparece como consecuente, y 3) es incorrecto simbolizar las expresiones «es necesario» y «es suficiente» como bicondicionales. Para convencerse de esto último, basta con fijarse en que los dos enunciados de partida son verdaderos, pero los que resultan de sustituir en (1′) y (2′) los condicionales por bicondicionales son falsos.

La expresión «sólo si» se utiliza en ocasiones con valor de bicondicional, pero usada en sentido estricto es un condicional como pone de manifiesto en la siguiente ejemplo. El enunciado

sólo llueve si hay nubes

y, su variante sintáctica,

sólo si hay nubes llueve

significan lo mismo que (2′). Obsérvese además que también equivalen a

si no hay nubes, entonces no llueve.

Es evidente que no podemos interpretar «sólo si» como un bicondicional, ya que todos estos enunciados son verdaderos, pero

llueve si y sólo si hay nubes

es falso.

BICONDICIONAL

Hay muy pocas expresiones en el lenguaje natural que se usen para expresar bicondicionales. Las más usuales son «es necesario y sufiente», «cuando y sólo cuando» y, por supuesto, «si y sólo si». (Obsérvese que estas expresiones ponen de manifiesto que un bicondicional equivale a la conjunción de dos condicionales.) Sin embargo, hay muchas ocasiones en que usamos condicionales con valor de bicondicionales. Cuando decimos, por ejemplo, que dos fórmulas son equivalentes si toda asignación les asigna el mismo valor de verdad, posiblemente estamos utilizando un condicional que debe interpretarse como un bicondicional. Naturalmente, si queremos ser fieles al significado del enunciado original, estos condicionales deben simbolizarse como bicondicionales.

2. Consecuencia y argumentación

Los cuatro argumentos siguientes ejemplifican una serie de estructuras básicas de caracter proposicional muy frecuentes:

1. Supongamos que *S* es una sustancia simple. Si *S* es simple, entonces no es divisible. Si *S* no es divisible, no es material (pues todas las sustancias materiales son divisibles). Así, *S* no es material.
2. Si un cuerpo *O* se mueve, entonces debe haber algún instante en el que esté moviéndose. Ahora bien, no hay ningún instante en el que un cuerpo esté moviéndose (esto es, en cada instante el cuerpo ocupa una posición fija y determinada). Por tanto, *O* no se mueve.
3. Supongamos que el vacío no existiera. En este caso los cuerpos no podrían moverse (pues no existiría un espacio vacío que pudieran ocupar al moverse). Pero esto es absurdo, puesto que los cuerpos se mueven. Por tanto, el vacío existe.
4. O me equivoco al creer que existo o no me equivoco. Si no me equivoco, entonces existo. Si me equivoco, entonces existo (pues los que no existen, no pueden equivocarse). Así, existo.

La idea del primer argumento está tomada de la *Monadología* de Leibniz (las sustancias simples son las mónadas). El segundo argumento es el núcleo de la paradoja de Zenón que hoy conocemos como «la flecha».[1] El tercer argumento fue usado por los epicúreos para defender la existencia del vacío (puede verse en la carta de Epicuro a Herodoto).[2] El cuarto argumento, un precedente del *Cogito ergo sum* de Descartes, se debe a san Agustín.[3]

1. Aristóteles, *Física*, VI, caps. 8 y 9 (239ª23 y ss.)
2. Diógenes Laercio, *Vidas de los más ilustres filósofos griegos* (Libro X, §29).
3. *La Ciudad de Dios* (XI, 26).

Hay dos formas equivalentes de ver el primer argumento. Por un lado, puede verse como la justificación de que la sustancia *S* no es material a partir de tres premisas, una de las cuales es que *S* es una sustancia simple. Por otro lado, el mismo argumento puede verse también como una demostración del condicional «si *S* es una sustancia simple, entonces *S* no es material». Para hacer una demostración directa de un condicional se supone su antecedente y se concluye su consecuente, y esto es precisamente lo que se hace en este argumento. La equivalencia de estas dos formas de ver el argumento es lo que expresa el siguiente enunciado:

$$\Gamma \models \alpha \to \beta \text{ sii } \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta.$$

Hay otro aspecto del argumento que merece destacarse. Si suponemos que *S* es una sustancia simple y que si *S* es simple, entonces no es divisible, es evidente que podemos concluir que *S* no es divisible. La estructura de este tipo de argumentación puede esquematizarse y generalizarse del siguiente modo

$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array}.$$

Este esquema recibe el nombre de *Modus Ponens* y es uno de los dos esquemas básicos que caracterizan la argumentación con condicionales.

El segundo argumento ejemplifica el otro modo básico de argumentar con condicionales. Su estructura es un caso particular del esquema

$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \neg\beta \\ \hline \neg\alpha \end{array},$$

que en la actualidad conocemos como *Modus Tollens*.

En las demostraciones llamadas «indirectas» o «por reducción al absurdo» se supone la negación del enunciado que se desea demostrar con el propósito de llegar a una contradicción. Cuando finalmente se alcanza este objetivo se considera demostrado el enunciado que se deseaba demostrar. La corrección de este tipo de demostraciones es lo que expresa el siguiente enunciado de la lógica proposicional:

$$\text{Si } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta \text{ y } \beta \text{ es una contradicción, entonces } \Gamma \models \alpha.$$

El propósito del tercer argumento es demostrar la existencia del vacío por reducción al absurdo. Para ello se supone que el vacío no existe y se llega a una contradicción (en este caso se llega a la negación de la premisa que afirma que los cuerpos se mueven).

A las demostraciones cuya estructura es

$$\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \alpha \to \gamma \\ \beta \to \gamma \\ \hline \gamma \end{array}$$

se las conoce como «demostraciones por casos». La estructura del cuarto argumento es un caso particular de este tipo de demostraciones. La primera premisa es una disyunción de la forma $\alpha \vee \neg\alpha$ (o me equivoco al creer que existo o no me equivoco) que, como sabemos, es una tautología y, por tanto, es innecesaria. En este caso particular el argumento adopta el esquema:

$$\begin{array}{c} \alpha \to \gamma \\ \neg\alpha \to \gamma \\ \hline \gamma \end{array}.$$

La siguiente proposición abarca todos los enunciados correspondientes a los esquemas de argumentación que acabamos de presentar.

PROPOSICIÓN 11.1. *Para todo conjunto de fórmulas* Γ *y para cualesquiera fórmulas* α, β *y* γ

(1) $\{(\alpha \to \beta), \alpha\} \models \beta$,
(2) $\{(\alpha \to \beta), \neg\beta\} \models \neg\alpha$,
(3) $\{(\alpha \vee \beta), (\alpha \to \gamma), (\beta \to \gamma)\} \models \gamma$,
(4) $\{(\alpha \to \gamma), (\neg\alpha \to \gamma)\} \models \gamma$,
(5) *si* $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, *entonces* $\Gamma \models \alpha \to \beta$,
(6) *si* $\Gamma \models \alpha \to \beta$, *entonces* $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$,
(7) *si* β *es una contradicción y* $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$, *entonces* $\Gamma \models \alpha$.

DEMOSTRACIÓN. Justificaremos (4), (5), (6) y (7) dejando las restantes como ejercicio.

(4) Mostraremos que toda asignación que hace verdaderas a $(\alpha \to \gamma)$ y a $(\neg\alpha \to \gamma)$ hace verdadera a γ. Sea v una asignación tal que $v(\alpha \to \gamma) = V$ y $v(\neg\alpha \to \gamma) = V$. Distinguimos dos casos $v(\alpha) = V$ o $v(\alpha) = F$ (demostración por casos). Si $v(\alpha) = V$, entonces $v(\gamma) = V$, ya que $v(\alpha \to \gamma) = V$. Si $v(\alpha) = F$, entonces $v(\gamma) = V$, pues $v(\neg\alpha) = V$ y $v(\neg\alpha \to \gamma) = V$. Así, en cualquier caso, $v(\gamma) = V$, como queríamos demostrar.

(5) Supongamos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ y, en busca de una contradicción, que $\Gamma \not\models \alpha \to \beta$. Así, existe una asignación v tal que v satisface Γ y $v(\alpha \to \beta) = F$. De este modo $v(\alpha) = V$ y $v(\beta) = F$. Pero entonces v satisface $\Gamma \cup \{\alpha\}$ y $v(\beta) = F$, lo que es imposible, pues hemos supuesto que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$. Por tanto, $\Gamma \models \alpha \to \beta$.

(6) Supongamos que $\Gamma \models \alpha \to \beta$. Para ver que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, suponemos que v es una asignación cualquiera que satisface Γ y mostramos que $v(\beta) = V$. Si v satisface $\Gamma \cup \{\alpha\}$, entonces v satisface a Γ y $v(\alpha) = V$. Puesto que $\Gamma \models \alpha \to \beta$, $v(\alpha \to \beta) = V$. Así, $v(\alpha) = V$ y $v(\alpha \to \beta) = V$; por tanto, $v(\beta) = V$.

(7) Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$ y β es una contradicción, entonces $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible. Así, toda asignación que satisface Γ hace falsa a $\neg\alpha$. En consecuencia, toda asignación que satisface Γ hace verdadera a α; esto es, $\Gamma \models \alpha$. □

3. Ejercicios

1. Suponemos que una figura sólo puede ser cuadrada o triangular, pequeña o grande, y roja o azul. Indique en cada una de las situaciones siguientes qué figura estamos describiendo:

   (a) Si la figura es grande, también es azul; o es un triángulo azul o es roja y pequeña; si es roja, no es un cuadrado pequeño; si es un triángulo, es rojo y pequeño.

   (b) Si es un cuadrado pequeño, es rojo; ni es un cuadrado grande ni es un cuadrado rojo; es un triángulo sólo si es rojo.

   (c) No es un cuadrado grande; no es un triángulo azul; es roja si y sólo si es pequeña.

   (d) Si es un cuadrado o es roja, es grande; es grande si y sólo si es azul; sólo es un cuadrado si es roja.

2. Simbolice cada uno de los argumentos siguientes y determine si es correcto o no.

   (a) Si una sustancia *S* es simple, entonces no es divisible en sustancias simples. Si *S* es una sustancia material, entonces es divisible en sustancias simples. Por tanto, si *S* no es material, entonces es simple.

   (b) Si *S* es un ser que no debe su existencia a ningún otro ser, entonces *S* es Dios. Si *S* debe su existencia a otro ser, entonces o él o alguno de sus antepasados debe su existencia a Dios o *S* tiene un número infinito de antepasados. Si el universo tuvo un comienzo el tiempo, *S* no tiene un número infinito de antepasados. Dios existe, tanto si *S* es Dios como si *S* o alguno de sus antepasados debe su existencia a Dios. Por tanto, si el universo tuvo un comienzo, Dios existe.

   (c) Si las cosas se componen de infinitas unidades iguales y estas unidades tienen peso, entonces el peso de las cosas es infinito. Si las cosas se componen de infinitas unidades iguales y estas unidades no tienen peso, entonces las cosas no pesan nada. Ni las cosas carecen de peso ni tienen un peso infinito. Por tanto, las cosas no se componen de infinitas unidades iguales.

   (d) El argumento *A* sólo tiene interés cuando es correcto y su conclusión contiene información que no contienen sus premisas. Si la conclusión del argumento *A* contiene información que no contienen sus premisas, entonces

puede suceder que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa. Como sucede con todos los argumentos, el argumento *A* sólo es correcto si no puede suceder que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa. Por tanto, el argumento *A* no tiene interés.

(e) Un cuerpo imposible de destruir (incluso por Dios) sólo puede existir si Dios puede y quiere crearlo. Si Dios es todopoderoso, entonces no existe un cuerpo que sea indestructible. Dios es todopoderoso y si quiere crear un cuerpo indestructible, puede hacerlo. Por tanto, Dios no quiere crear un cuerpo indestructible.

Compare este argumento con el que resulta de sustituir la primera premisa por la siguiente: un cuerpo imposible de destruir existe si Dios puede y quiere crearlo.

TERCERA PARTE

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Capítulo 12

SINTAXIS DE LOS LENGUAJES DE PRIMER ORDEN

1. Introducción

La lógica proposicional sólo es útil para analizar la estructura de los enunciados compuestos formados a partir de otros más simples con ayuda de expresiones veritativo-funcionales. Hay muchos argumentos cuya corrección no depende (o al menos no depende exclusivamente) de este tipo de expresiones, sino de la estructura de enunciados que en lógica proposicional se consideran simples. Consideremos, por ejemplo, los tres argumentos siguientes:

> Todos los planetas son esféricos, Júpiter es un planeta; por tanto, Júpiter es esférico.
>
> El planeta Júpiter es mayor que Marte; por tanto, hay algún planeta mayor que Marte.
>
> 6 es divisible por 2, 7 no es divisible por 2; por tanto, 6 es distinto de 7.

Es evidente que los tres argumentos son correctos, pero la lógica proposicional no puede dar cuenta de la correción de ninguno de ellos. Desde el punto de vista de la lógica proposicional los enunciados que aparecen en estos argumentos son simples (es decir, no resultan de combinar dos enunciados mediante una expresión veritativo-funcional) o son negaciones de enunciados simples. El único modo de simbolizar un enunciado simple en lógica proposicional es mediante una letra proposicional, de modo que si simbolizamos en un lenguaje proposicional estos argumentos obtendremos (ordenados de izquierda a derecha):

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \hline p_3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} q_1 \\ \hline q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} r_1 \\ \neg r_2 \\ \hline \neg r_3 \end{array}$$

(en el tercer argumento la letra r_2 corresponde a «7 es divisible por 2» y r_3 a «6 es igual a 7»). Es obvio que la corrección de los tres argumentos del lenguaje natural radica en aspectos estructurales de los enunciados que los componen y

que la lógica proposicional es incapaz de reflejar. Ésta es precisamente la razón de que los argumentos resultantes de la simbolizarción no sean lógicamente correctos.

Para estudiar la corrección de argumentos como los que nos sirven de ejemplo necesitamos un lenguaje formal que nos permita analizar o representar la estructura de enunciados que en lógica proposicional se consideran simples. Un modo de averiguar qué tipo de signos debe tener un lenguaje formal útil para esta finalidad es observar el tipo de expresiones que aparecen en los enunciados que deseamos analizar. En los enunciados que componen los argumentos anteriores se encuentran todos los elementos sintácticos que nos interesan.

Las expresiones que aparecen en dichos enunciados pueden clasificarse en cinco categorías:

1. Nombres propios, que son expresiones que usamos para referirnos a un objeto determinado. Obviamente, «Júpiter» y «Marte» son nombres propios, pero es importante observar que «6», «7» y «2» también lo son.
2. Nombres comunes y adjetivos que utilizamos para decir que un objeto tiene cierta propiedad; «planeta», «estrella» y «número» son palabras que se usan con esta finalidad.
3. Expresiones relacionales, esto es, expresiones que usamos para referirnos a relaciones o para decir que un individuo está relacionado de algún modo con otro. A esta categoría pertenecen, por ejemplo, las expresiones «es divisible por» y «es mayor que». Estas expresiones son binarias, porque relacionan dos individuos. Aunque no aparecen en los ejemplos, también podemos encontrar en el lenguaje natural expresiones relacionales ternarias como en «a está entre b y c».
4. Una expresión relacional especial que nombra a la relación de identidad: «es igual a».
5. Expresiones que usamos para hablar de la totalidad o de una parte de un dominio de objetos como, por ejemplo, «todos» y «algunos». A este tipo de expresiones las llamamos *cuantificadores*. Como veremos, la palabra «ninguno» puede considerarse una combinación de la negación y alguna de las dos anteriores.

No hemos incluido en la lista las expresiones veritativos-funcionales porque no figuran en los enunciados que intervienen en los argumentos que usamos como ejemplo, pero, como se comprenderá más adelante, son necesarias para analizar algunos de ellos.

Para poder representar la estructura (o la forma) de enunciados de este tipo necesitamos que nuestro lenguaje tenga signos que desempeñen una función similar a las desempeñadas por las expresiones de las distintas categorías que acabamos de mencionar. Así, nuestro lenguaje tendrá signos (que llamaremos *lógicos*) para las conectivas, la relación de identidad y los cuantificadores. Para usar los cuantificadores necesitaremos además variables individuales, un tipo de signos que no aparecen en la lista anterior simplemente porque no hemos intentado analizar los enunciados que nos sirven de ejemplo. Por último, dispondremos también de *constantes individuales, símbolos de predicado* y *símbolos relacionales* que nos permitirán simbolizar las expresiones que pertenecen a las tres primeras categorías. Las constantes individuales desempeñarán en el lenguaje formal una función sintáctica análoga a la que desempeñan los nombres propios en el lenguaje natural; del mismo modo, la función de los símbolos relacionales será similar a la de las expresiones relacionales y la de los símbolos de predicado a la de los nombres comunes y adjetivos del lenguaje natural.

La corrección de los argumentos a los que deseamos aplicar el sistema lógico que vamos a introducir depende de las expresiones correspondientes a los símbolos lógicos. Explícitamente, la lógica de primer orden con identidad (que es la que presentamos en este libro) se aplica al análisis de los argumentos cuya corrección no depende sólo del significado de las expresiones veritativo-funcionales, sino también de las propiedades de la relación de identidad o del significado de los cuantificadores.

2. Los lenguajes de primer orden

Todos los lenguajes de primer orden tienen en común los símbolos siguientes:

1. VARIABLES. Hay infinitas variables, tantas como números naturales. En lo sucesivo utilizaremos «x», «y» y «z», posiblemente con subíndices, como variables; también usaremos estas letras para referirnos a variables cualesquiera.
2. CONECTIVAS: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$.
3. CUANTIFICADORES: El cuantificador universal, $\forall$, y el cuantificador existencial, $\exists$.
4. SÍMBOLO DE IGUALDAD: $\approx$.
5. PARÉNTESIS.

Las conectivas, los cuantificadores y el símbolo de igualdad son los **símbolos lógicos** del lenguaje y los paréntesis son sus **símbolos auxiliares**.

Cada lenguaje de primer orden está caracterizado por sus **símbolos propios** (los que tiene además de los comunes). Estos símbolos pueden ser de tres tipos: constantes individuales, símbolos de predicado y símbolos relacionales. Más adelante, en el capítulo 15, consideraremos lenguajes con una nueva clase de símbolos, los símbolos funcionales. Las **constantes individuales** (o, simplemente, constantes) se comportan como nombres propios, los **símbolos de predicado** sirven para expresar propiedades y con los **símbolos relacionales** expresamos relaciones. Cada símbolo relacional tiene un índice, que es un número mayor o igual que 2; indica el tipo de relación que puede expresar: binaria, ternaria,..., n-aria. Por razones técnicas, es conveniente considerar los símbolos de predicado como símbolos relacionales unarios, es decir de índice 1.

No hay ninguna restricción acerca del número de símbolos propios que puede tener un lenguaje de primer orden o acerca del número de símbolos que puede tener de cada clase. Por ejemplo, un lenguaje de primer orden puede tener como símbolos propios únicamente una constante, o una constante y un símbolo relacional, o un símbolo de predicado y ningún símbolo relacional, etc. También puede carecer de símbolos propios; el único lenguaje sin símbolos propios es el *lenguaje puro de la identidad*. En cualquier caso, para identificar un lenguaje de primer orden basta decir cuáles son sus constantes, cuáles son sus símbolos de predicado y cuáles son sus símbolos relacionales, es decir, basta con especificar sus símbolos propios.

Normalmente, usaremos las letras «c», «d» y «e» como constantes; las letras «P» y «Q» como símbolos de predicado y las letras «R», «S» y «T» como símbolos relacionales, todas ellas posiblemente con subíndices. También usaremos estas letras para referirnos, respectivamente, a constantes, símbolos de predicado y símbolos relacionales cualesquiera.

Una **expresión** de un lenguaje de primer orden L es una sucesión finita de símbolos de L. De entre las expresiones destacamos los términos y las fórmulas, que definimos a continuación.

Un **término** de un lenguaje de primer orden L es una variable o una constante de L.

Fórmulas

Las **fórmulas atómicas** de un lenguaje de primer orden L son todas las expresiones de la forma

$$t \approx t', \quad Pt, \quad Rt_1 \ldots t_n$$

donde t, t' y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L, P es un símbolo de predicado de L y R es un símbolo relacional n-ario de L. Las fórmulas de la forma $t \approx t'$ se llaman *ecuaciones*.

Las siguientes expresiones son fórmulas atómicas:

$$x \approx y, \quad c \approx d, \quad x \approx d, \quad Rxc,$$
$$Rxy, \quad Pc, \quad Qy, \quad Sxyz,$$

donde R es un símbolo relacional binario y S es un símbolo relacional ternario.

A partir de sus fórmulas atómicas podemos obtener todas las fórmulas de un lenguaje L. Una **fórmula** de L o, simplemente, una fórmula es una expresión que se obtiene de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Toda fórmula atómica de L es una fórmula.
2. Si α es una fórmula, también lo es $\neg\alpha$.
3. Si α y β son fórmulas, también lo son $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ y $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.
4. Si α es una fórmula y x es una variable, $\forall x\alpha$ y $\exists x\alpha$ también son fórmulas.

El conjunto de las fórmulas de L es, por tanto, el menor conjunto de expresiones de L que contiene a todas las fórmulas de L y está cerrado respecto a las reglas de las cláusulas 2, 3 y 4 anteriores. Así, tenemos el siguiente principio de inducción para fórmulas.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN PARA FÓRMULAS. *Si L es un lenguaje de primer orden, $\mathcal{P}$ es una propiedad y*

1. *todas las fórmulas atómicas de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$,*
2. *si α es una fórmula de L con la propiedad $\mathcal{P}$, $\neg\alpha$ también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*
3. *si α y β son fórmulas de L con la propiedad $\mathcal{P}$, las fórmulas $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*
4. *si α es una fórmula de L con la propiedad $\mathcal{P}$ y x es una variable, las fórmulas $\forall x\alpha$ y $\exists x\beta$ también tienen la propiedad $\mathcal{P}$,*

entonces toda fórmula de L tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Las siguientes expresiones son fórmulas no atómicas:

$$\neg x \approx y, \qquad \neg Px,$$
$$(Px \to Rxy), \qquad (Px \wedge \neg Qy),$$
$$\forall x Px, \qquad \forall x \neg Px,$$
$$\forall x(\exists y(Px \wedge Rxy) \to \neg Rxx), \qquad \forall x \forall y(Px \to Rxy).$$

La tercera cláusula de la definición de fórmula contiene en rigor cuatro reglas y la cuarta cláusula dos. Como ya se explicó en el capítulo 6, los paréntesis que introducen las reglas de la cláusula 3 son necesarios para que las fórmulas admitan una única lectura, es decir, carezcan de ambigüedad.

Como hacíamos en la lógica proposicional, *podemos omitir los paréntesis exteriores* de una fórmula. Así, por ejemplo, escribiremos

$$\forall x \exists y(Px \wedge Rxy) \to \neg Rcc$$

en lugar de

$$(\forall x \exists y(Px \wedge Rxy) \to \neg Rcc).$$

También escribiremos $\forall x_1 \ldots x_n\alpha$ y $\exists x_1 \ldots x_n\alpha$ en lugar de $\forall x_1 \ldots \forall x_n\alpha$ y de $\exists x_1 \ldots \exists x_n\alpha$, respectivamente. Así, la secuencia de cuantificaciones

$$\forall x \forall y \exists z \exists u \forall v \forall w$$

se abrevia

$$\forall xy \exists zu \forall vw.$$

Por ejemplo, escribiremos

$$\forall x \forall y(Px \rightarrow \exists z \exists v(Qv \wedge Rzy))$$

en vez de

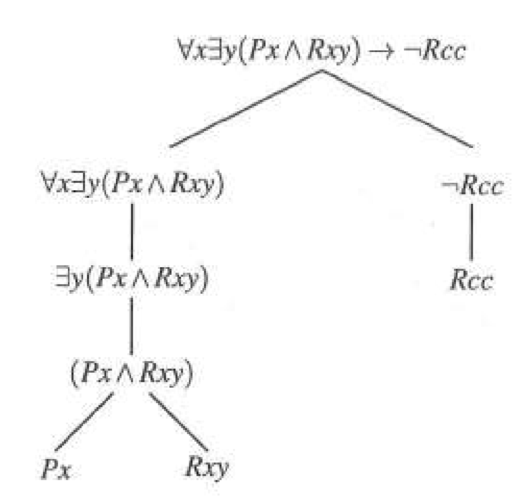
$$\forall xy(Px \rightarrow \exists zv(Qv \wedge Rzy)).$$

Al igual que en lógica proposicional, diremos que una fórmula de la forma $(\alpha \rightarrow \beta)$ es un condicional, una de la forma $\neg\alpha$ una negación, etc. Además diremos que las fórmulas de la forma $\forall x\alpha$ son cuantificaciones universales y las de la forma $\exists x\alpha$ cuantificaciones existenciales; así, se dice que $\forall x\alpha$ es una cuantificación universal de α y que $\exists x\alpha$ es una cuantificación existencial de α.

SUBFÓRMULAS

Al igual que en el caso de la lógica proposicional podemos asociar a cada fórmula su *árbol genealógico*, que describe la construcción o generación de la fórmula de acuerdo con las reglas anteriores. Sus nudos últimos los constituyen las fórmulas atómicas a partir de las que se obtiene la fórmula. Por ejemplo:

1. El árbol genealógico de la fórmula $\forall x \exists y(Px \wedge Rxy) \rightarrow \neg Rcc$ es el siguiente:



2. El árbol genealógico de la fórmula $\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy) \rightarrow \forall x(\exists yRxy \rightarrow \neg Qx)$ es:

$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy) \rightarrow \forall x(\exists yRxy \rightarrow \neg Qx)$

$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy)$ $\quad$ $\forall x(\exists yRxy \rightarrow \neg Qx)$

$(Px \rightarrow \exists yRxy)$ $\quad$ $(\exists yRxy \rightarrow \neg Qx)$

Px $\quad$ $\exists yRxy$ $\quad$ $\exists yRxy$ $\quad$ $\neg Qx$

Rxy $\quad$ Rxy $\quad$ Qx

Las **subfórmulas** de una fórmula son las fórmulas que aparecen en su árbol genealógico, incluida la propia fórmula. Así, las subfórmulas de la fórmula

$$\forall x \exists y(Px \wedge Rxy) \rightarrow \neg Rcc$$

del primer ejemplo son:

$\forall x \exists y(Px \wedge Rxy) \rightarrow \neg Rcc$,	$\forall x \exists y(Px \wedge Rxy)$,	$\neg Rcc$,
$\exists y(Px \wedge Rxy)$,	Rcc,	$(Px \wedge Rxy)$.
Px,	Rxy,	

Las de la fórmula $\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy) \rightarrow \forall x(\exists yRxy \rightarrow \neg Qx)$ del segundo ejemplo son:

$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy) \rightarrow \forall x(\exists yRxy \rightarrow \neg Qx)$,	$\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy)$,
$\forall x(\exists yRxy \rightarrow \neg Qx)$,	$(Px \rightarrow \exists yRxy)$,
$(\exists yRxy \rightarrow \neg Qx)$,	Px,
$\exists yRxy$,	$\neg Qx$,
Rxy,	Qx.

Podemos obtener las subfórmulas de una fórmula cualquiera de acuerdo con las reglas siguientes:

1. Si α es atómica, α es su única subfórmula.
2. Si α es $\neg\beta$, las subfórmulas de α son α y las subfórmulas de β.

3. Si α es $(\beta \wedge \gamma)$ o $(\beta \vee \gamma)$ o $(\beta \rightarrow \gamma)$ o $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, las subfórmulas de α son α, las subfórmulas de β y las subfórmulas de γ.
4. Si α es $\forall x\beta$ o $\exists x\beta$, las subfórmulas de α son α y las subfórmulas de β.

VARIABLES LIBRES Y LIGADAS

Para poder expresar algunos hechos con comodidad llamaremos **bloques cuantificacionales** a las expresiones de la forma $\forall x$ y $\exists x$, es decir, aquellas que constan de un cuantificador seguido de una variable.

Un mismo símbolo puede aparecer distintas veces en una expresión, o, como diremos, puede presentar distintas *apariciones* en la expresión. En particular, una misma variable puede aparecer varias veces en una fórmula.

Una **aparición** de la variable x en una fórmula α es **ligada** si es una aparición de x es una subfórmula de α de la forma $\exists x\beta$ o $\forall x\beta$, en cuyo caso decimos que está ligada por el cuantificador existencial o el universal, respectivamente. Así, toda aparición de una variable x en un bloque cuantificacional es ligada. Una aparición no ligada de una variable en una fórmula es una **aparición libre** de la variable en la fórmula. Así, en la fórmula

$$\forall x(Px \rightarrow Rxy) \rightarrow (\exists yPy \rightarrow Rxz)$$

la primera aparición de x fuera de un bloque cuantificacional (en Px) y la segunda (en Rxy) son apariciones ligadas (por $\forall x$). Sin embargo, la tercera (en Rxz) es libre. La primera aparición de la variable y fuera de un bloque cuantificacional (en Rxy) es libre, y la segunda (en Py) es ligada (por $\exists y$). Por último, la única aparición de la variable z es libre.

Una variable **está ligada** en una fórmula si aparece en la fórmula y por lo menos una de sus apariciones es ligada. Análogamente, una variable **está libre** en una fórmula si aparece en ella y por lo menos una de sus apariciones es libre. Una misma variable puede estar libre y ligada en una misma fórmula (aunque, naturalmente, ninguna aparición de la variable puede ser a la vez libre y ligada). Para indicar que las variables que aparecen libres en una fórmula α están entre las variables $x_1, \ldots, x_n$ escribiremos

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

Así, cuando por ejemplo utilicemos la expresión $\varphi(x)$ deberá entenderse que en la fórmula φ o no aparece ninguna variable libre o únicamente aparece libre la variable x.

Una fórmula con una o más variables libres es una **fórmula abierta** y toda fórmula sin variables libres es una **fórmula cerrada** o **sentencia**. Las sentencias son las fórmulas que corresponden a los enunciados de un lenguaje natural, aquellas fórmulas de las que, una vez interpretadas, tiene sentido preguntarse si son verdaderas o falsas. Por ejemplo, las fórmulas

$\neg c \approx d,$	$Pc \rightarrow Rcc,$
$\forall x\forall y(Px \rightarrow Rxy),$	$\forall x(\exists y(Px \wedge Rxy) \rightarrow \neg Rxc)$

son sentencias, mientras que

$\neg c \approx y,$	$Px \rightarrow Rxy,$
$\forall x\exists yRxy \rightarrow Rxx,$	$\forall x(\exists y(Px \wedge Rxy) \rightarrow \neg Rzx)$

son fórmulas abiertas.

SUSTITUCIÓN DE VARIABLES POR TÉRMINOS

Si φ es una fórmula de un lenguaje de primer orden, x es una variable y t un término (una constante o una variable), la **sustitución** de x por t en φ, en símbolos, $\varphi\binom{x}{t}$, es la fórmula obtenida al reemplazar en φ cada aparición libre de x en φ por t. Por ejemplo

1. $Px\binom{x}{y}$ es la fórmula Py
2. $Py\binom{x}{c}$ es la fórmula Py
3. $\forall x(Rxy \rightarrow Py)\binom{y}{c}$ es la fórmula $\forall x(Rxc \rightarrow Pc)$
4. $\forall y(Ryx \rightarrow Px)\binom{y}{c}$ es la fórmula $\forall y(Ryx \rightarrow Px)$
5. $(\forall xPx \rightarrow Qx)\binom{x}{y}$ es la fórmula $(\forall xPx \rightarrow Qy)$.

En los ejemplos (2) y (4) no debemos reemplazar ningún símbolo puesto que la variable y no aparece libre en la fórmula. En el ejemplo (5) únicamente reemplazamos la tercera aparición de x, que es la única libre.

Si φ es una fórmula, $x_1, \ldots, x_n$ son variables distintas y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, la **sustitución simultánea** de las variables $x_1, \ldots, x_n$ por los términos $t_1, \ldots, t_n$ en φ, en símbolos, $\varphi\binom{x_1, \ldots, x_n}{t_1, \ldots, t_n}$, es la fórmula obtenida al reemplazar en φ cada aparición libre de x_1 por t_1, ..., y cada aparición libre de x_n por t_n. Por ejemplo, la sustitución simultánea de x, y, z por c, d, y en

$$\forall x(Px \rightarrow x \approx y) \wedge Qz$$

es la fórmula

$$\forall x(Px \rightarrow x \approx d) \wedge Qy.$$

Observemos que es posible que $\varphi\binom{x_1, x_2}{t_1, t_2}$ sea diferente de $\varphi\binom{x_1}{t_1}\binom{x_2}{t_2}$. Así, por ejemplo

$$Rxy\binom{x, y}{y, x} = Ryx$$

pero

$$Rxy\binom{x}{y}\binom{y}{x} = Rxx.$$

Sin embargo, si t_1 y t_2 son constantes, entonces $\varphi\binom{x_1, x_2}{t_1, t_2}$ y $\varphi\binom{x_1}{t_1}\binom{x_2}{t_2}$ son iguales.

3. Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas atómicas? (R es un símbolo relacional binario y S uno ternario).

(1) Rxy,
(2) Sxy,
(3) $Sxyc$,
(4) $\neg Rxy$,
(5) Pxy,
(6) $RPxy$,
(7) Pc,
(8) $Sccc$,
(9) P,
(10) $Px \wedge Py$.

2. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas? (R es un símbolo relacional binario).

(1) $\forall xRxy$,
(2) $\forall cRxy$,
(3) $\forall zRxy$,
(4) $(Rxy \wedge Px)$,
(5) $\forall x(PxRxy)$,
(6) $(\forall xPx)$,
(7) $\forall x(Px \to (Qx \vee Rxy))$,
(8) $\forall x(Px \to (Qx \vee Rxy)$,
(9) $\forall x(Px \to \exists y(Qx \vee Rxy))$,
(10) $\forall x\exists y(Px \to Rxy)$,
(11) $\forall x(\exists y(Px \to Rxy))$,
(12) $\forall x\exists yPy \to Rxy$.

3. Añada paréntesis a la expresión

$$\forall x\forall yRxy \to Ryx$$

de modo que resulte una fórmula cuya forma sea la que se indica:

(1) un condicional,
(2) la cuantificación universal de un condicional,
(3) la cuantificación universal de la cuantificación universal de una fórmula.

4. Añada paréntesis a la expresión

$$\forall x\exists yRxy \to \forall zRxz$$

de modo que resulte una fórmula cuya forma sea la que se indica:

(1) un condicional,
(2) la cuantificación universal de un condicional,
(3) la cuantificación universal de la cuantificación existencial de una fórmula.

5. Añada paréntesis a la expresión

$$\forall x\neg\exists yRxy \vee Rxz$$

de modo que resulte una fórmula cuya forma sea la que se indica:

(1) una disyunción,
(2) la cuantificación universal de una disyunción,
(3) la cuantificación universal de una negación.

6. Añada paréntesis a la expresión

$$\forall x\forall yRxy \to \exists zPx \wedge Rxz \vee Px$$

de modo que resulte una fórmula cuya forma sea la que se indica:

(1) una disyunción,
(2) un condicional cuyo consecuente es una disyunción,
(3) una disyunción cuyo primer componente es una cuantificación universal,
(4) la cuantificación universal de una disyunción,
(5) la cuantificación universal de un condicional,
(6) la cuantificación universal de la cuantificación universal de un condicional,
(7) la cuantificación universal de la cuantificación universal de una disyución,
(8) la cuantificación universal de un condicional cuyo consecuente es la cuantificación existencial de una fórmula.

7. Halle las subfórmulas de cada una de las fórmulas siguientes.

(1) $\forall x(Px \to Rxy)$,
(2) $\forall xRxy$,
(3) $\forall z(Rxy \wedge \exists yPy)$,
(4) $Rxy \wedge \neg Px$,
(5) $\forall xPx \vee Rxy$,
(6) $\neg\neg\forall xPx$,
(7) $\forall x(Px \to (Qx \vee Rxy))$,
(8) $\forall x\forall y(Px \to (Qx \vee Rxy))$,
(9) $\exists x(Px \wedge \exists y(Qx \vee Rxy))$,
(10) $\forall x\exists yRxy$,
(11) $\exists y\forall xRxy$,
(12) $\forall x(\exists yPy \to Rxy)$.

8. Para cada una de las fórmulas siguientes diga qué apariciones de variables son libres y cuáles ligadas. Indique en cada caso qué bloque cuantificacional liga las apariciones ligadas.

(1) $\forall xRxy$,
(2) $\forall x(Px \to Rxy)$,
(3) $\forall x(Rxy \wedge \exists yPy)$,
(4) $\exists y(\exists xRxy \wedge \neg Px)$,
(5) $\forall xPx \vee \forall yRxy$,
(6) $\forall x(Rxx \to \exists y(Py \wedge Rxy))$,
(7) $\forall x(Px \to (Qx \vee \exists y\exists xRxy))$,
(8) $\forall x\forall y(Px \to (Qx \vee Rxy))$,
(9) $\exists x(Px \wedge \exists y(Qx \vee Rxy))$,
(10) $\forall x\exists yRxy$,
(11) $\exists y\forall yRxy$,
(12) $\forall x(\exists xPx \to Rxy)$.

9. Clasifique las siguientes fórmulas en sentencias y fórmulas abiertas.

(1) $\forall x \forall y Rxy$,
(2) $\forall x(Px \to Rxy)$,
(3) $\forall x(Rxy \land \exists y Py)$,
(4) $\exists y \exists x(Rxy \land \neg Px)$,
(5) $\forall x Px \lor \forall y \exists x Rxy$,
(6) $\forall x(Rxx \to \exists y(Py \land Rxy))$,
(7) $\forall x(Px \to (Qx \lor \exists y Rxy))$,
(8) $\forall x \forall y(Px \to (Qx \lor Rxy))$,
(9) $\exists x Px \land \exists y(Qx \lor Rxy)$,
(10) $\forall x \exists y Rxy$,
(11) $\exists y Rxy$,
(12) $\forall y(\exists x Px \to Rxy)$.

10. Obtenga primero la sustitución de la variable y por la constante c y después la sustitución de la variable y por la variable x en cada una de las fórmulas siguientes.

(1) $\forall x Rxy$
(2) $\forall x(Px \to Rxy)$
(3) $\forall x(Rxy \land \exists y Py)$
(4) $\exists y \exists x(Rxy \land \neg Px)$
(5) $\forall x Px \lor \exists x Rxy$
(6) $\forall x(Rxx \to (\exists y Py \land Rxy))$
(7) $\forall x(Py \to (Qx \lor Rxy))$
(8) $\forall x \forall y(Px \to (Qx \lor Rxy))$
(9) $(\exists x Px \land (\exists y Qx \lor Rxy))$
(10) $\forall x(Rxy \to \exists y Rxy)$
(11) $\exists y Rxy \land \exists x Rxy$
(12) $\forall x(\exists x Px \to Rxy)$

11. Es fácil pasar de la fórmula Rxy a la fórmula Ryx mediante una sustitución simultánea: $Rxy\binom{x,y}{y,x} = Ryx$. Sin embargo, las fórmulas $Rxy\binom{x}{y}\binom{y}{x}$, Ryx y $Rxy\binom{y}{x}\binom{x}{y}$ son distintas entre sí. No obstante, toda sustitución simultánea puede obtenerse mediante series de sustituciones individuales. Pase de Rxy a Ryx y de $Sxyz$ a $Szyx$ mediante una serie de sustituciones individuales.

12. Demuestre, utilizando el principio de inducción para fórmulas, que para cada fórmula φ, cada variable x y cada término t, la sustitución de x por t en φ, es decir, la expresión $\varphi\binom{x}{t}$, es una fórmula.

13. Demuestre, utilizando el principio de inducción para fórmulas, que el número de símbolos lógicos de una fórmula es siempre mayor que el número de símbolos lógicos de sus subfórmulas propias (es decir, las distintas a ella).

CAPÍTULO 13

SEMÁNTICA DE LOS LENGUAJES DE PRIMER ORDEN

1. Estructuras

En el capítulo anterior introdujimos la sintaxis de los lenguajes de primer orden. Ahora prestaremos atención a su semántica, es decir, indicaremos cómo se les atribuye significado.

Para interpretar un lenguaje de primer orden deberemos hacer dos cosas: fijar un conjunto A no vacío de objetos e interpretar cada uno de los símbolos propios. Esto último se hace indicando para cada una de las constantes qué objeto del dominio A va a nombrar, asignando a cada símbolo de predicado un subconjunto (que puede ser vacío) del conjunto A y asignando a cada símbolo relacional n-ario una relación n-aria, es decir un conjunto (que puede ser vacío) de n-tuplos de elementos de A.

Así, una **interpretación** para un lenguaje de primer orden L consiste en un par

$$\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F} \rangle,$$

al que llamamos una **estructura** para L, donde

1. A es un conjunto no vacío, llamado el **dominio** o el **universo** de la estructura,
2. $\mathcal{F}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios de L y tal que:
   2.1. si P es un símbolo de predicado de L, $\mathcal{F}(P)$ es un subconjunto de A,
   2.2. si R es un símbolo relacional n-ario de L $(n > 1)$, $\mathcal{F}(R)$ es una relación n-aria en A,
   2.3. si c es una constante de L, $\mathcal{F}(c)$ es un elemento de A.

Si s es un símbolo propio de L, $\mathcal{F}(s)$ es la **interpretación** de s en la estructura $\mathcal{A}$. En lugar de «$\mathcal{F}(s)$» usaremos habitualmente

$$s^{\mathcal{A}}$$

para referiremos a la interpretación de s en $\mathcal{A}$, es decir, $s^{\mathcal{A}} = \mathcal{F}(s)$. Si c es una constante individual, diremos que $c^{\mathcal{A}}$ es la **denotación**, o el **valor**, de c en $\mathcal{A}$.

Por ejemplo, si L es el lenguaje cuyos símbolos propios son dos símbolos de predicado, P y Q, dos símbolos relacionales binarios, R y S, y dos constantes, c y d, representaremos una estructura para L del siguiente modo:

$$\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle.$$

EJEMPLOS

Consideremos el lenguaje L cuyos símbolos propios son dos símbolos de predicado P y Q, un símbolo relacional binario R y tres constantes c_1, c_2 y c_3. Una estructura para este lenguaje es

$$\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, c_3^{\mathcal{A}} \rangle,$$

donde A es el conjunto de los objetos celestes del sistema solar, $P^{\mathcal{A}}$ es el conjunto de los planetas, $Q^{\mathcal{A}}$ es el conjunto de los satélites, $R^{\mathcal{A}}$ es la relación *girar alrededor de* entre objetos celestes del sistema solar, $c_1^{\mathcal{A}}$ es la Tierra, $c_2^{\mathcal{A}}$ es la Luna y $c_3^{\mathcal{A}}$ es el Sol.

Otra estructura para este lenguaje es

$$\mathcal{B} = \langle B, P^{\mathcal{B}}, Q^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, c_3^{\mathcal{B}} \rangle,$$

donde B es el conjunto de los números naturales, $P^{\mathcal{B}}$ es el conjunto de los números pares, $Q^{\mathcal{B}}$ es el conjunto de los números primos, $R^{\mathcal{B}}$ es la relación *ser menor que* entre números naturales, $c_1^{\mathcal{B}}$ es el número 0, $c_2^{\mathcal{B}}$ es el número 1 y $c_3^{\mathcal{B}}$ es el número 5.

Por último, otra estructura para L es

$$C = \langle C, P^C, Q^C, R^C, c_1^C, c_2^C, c_3^C \rangle$$

donde

$$C = \{1,2,3,4\}, \qquad P^C = \{1,2\},\ Q^C = \emptyset,$$
$$R^C = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}, \qquad c_1^C = 2,\ c_2^C = 1,\ c_3^C = 4.$$

OBSERVACIONES

1. El universo de una estructura nunca es vacío.
2. Es posible que las interpretaciones de los símbolos de predicado y de los símbolos relacionales sean el conjunto vacío. La razón es que es posible hablar de propiedades que no posee ningún objeto del dominio de la estructura y de relaciones que no se dan entre objetos del mismo.

3. Un mismo lenguaje de primer orden puede tener distintas interpretaciones, es decir, puede interpretarse en distintas estructuras.

2. Verdad en una estructura

Una estructura para un lenguaje de primer orden nos proporciona la interpretación de los símbolos propios del mismo. Para determinar el valor de verdad de las sentencias del lenguaje en la estructura debemos fijar también el significado de los símbolos lógicos. El significado de las conectivas es el que se ha descrito en lógica proposicional: la *conjunción* de dos sentencias es verdadera en una estructura si y sólo si cada una de ellas es verdadera, la *disyunción* de dos sentencias es verdadera en una estructura si y sólo si al menos una de ellas es verdadera, la *negación* de una sentencia es verdadera si y sólo si la sentencia negada es falsa, el *condicional* de dos sentencias es verdadero si y sólo si su antecedente es falso o su consecuente verdadero, y el *bicondicional* de dos sentencias es verdadero si y sólo si ambas son verdaderas o ambas falsas. El *cuantificador universal* significa «para todo objeto del dominio de la estructura» y el *cuantificador existencial* significa «para algún objeto del dominio de la estructura». Así, si el lenguaje tiene el símbolo de predicado P, la sentencia $\forall x Px$ es verdadera en una estructura $\mathcal{A}$ si y sólo si todos los objetos del dominio de la estructura $\mathcal{A}$ pertenecen al conjunto que interpreta a P, es decir, si $P^{\mathcal{A}}$ es igual al dominio de $\mathcal{A}$. Análogamente, la sentencia $\exists x Px$ es verdadera en una estructura $\mathcal{A}$ si y sólo si hay al menos un objeto del dominio de la estructura $\mathcal{A}$ que pertenece a $P^{\mathcal{A}}$.

EJEMPLOS

Consideremos el lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado P y Q, un símbolo relacional binario R y una constante c. Consideremos la estructura

$$\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle,$$

donde

A es el conjunto de los números naturales,

$P^{\mathcal{A}}$ es el conjunto de lo números pares,

$Q^{\mathcal{A}}$ es el conjunto de los números impares,

$R^{\mathcal{A}}$ es la relación *menor que* entre números naturales, es decir,

$$\langle n,m\rangle \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{sii} \quad n \text{ es menor que } m,$$

$c^{\mathcal{A}}$ es el número 1.

El papel de las variables en las ecuaciones es parecido al de los pronombres en una lengua natural. Consideremos la oración

él es un novelista.

Fuera de contexto, esta oración no es ni verdadera ni falsa. La podemos usar para referirnos a distintas personas. Si con «él» nos referirmos a Camilo José Cela o a Mario Vargas Llosa lo que decimos es verdadero, pero si nos referirmos a Picasso o a Federico Fellini lo que decimos es falso.

Una fórmula con una variable libre, como, por ejemplo, Px, se comporta análogamente a una ecuación y a una expresión con pronombres. En una estructura $\mathcal{A}$, según qué objeto asignemos a x, Px puede expresar una verdad o una falsedad. Por ejemplo, en la estructura $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}\rangle$, donde P y Q son símbolos de predicado, R es un símbolo relacional binario, c es una constante, $A = \{1,2,3,4\}$ y

$$P^{\mathcal{A}} = \{1,2\},\ Q^{\mathcal{A}} = \{2,3\},\ R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}, c^{\mathcal{A}} = 1,$$

si asignamos a x el número 1 o el 2, la fórmula Px expresa una verdad, pero si asignamos a x el número 3 o el 4, expresa una falsedad. Por analogía con el caso de las ecuaciones podemos decir que 1 y 2 son soluciones de Px en $\mathcal{A}$ pero que 3 y 4 no lo son.

La analogía que hemos establecido entre la fórmula Px y las ecuaciones por un lado, y las expresiones con pronombres por otro, vale de modo general para las fórmulas con variables libres. Así, las soluciones de $\neg Px$ en la estructura $\mathcal{A}$ son 3 y 4.

Consideremos la fórmula $(Px \vee Qx)$ interpretada en la estructura anterior. Es verdadera tanto si asignamos 1 a la variable x como si le asignamos 2 o 3 pero es falsa si le asignamos 4. Así, las soluciones de la fórmula son 1, 2 y 3.

Consideremos ahora la fórmula $\exists xRxy$. En esta fórmula la variable y es la única que está libre. Es a ella a la que debemos asignar objetos. Si la interpretamos en la estructura anterior y asignamos 1 a y obtenemos una falsedad puesto que no hay ningún objeto $a \in A$ tal que $\langle a,1\rangle \in R^{\mathcal{A}}$, pero si le asignamos 2, lo que así expresa es verdadero puesto que hay un objeto relacionado con 2, el 1. La fórmula (interpretada en la estructura y sin asignar objetos a su variable libre) expresa una propiedad, la que tienen aquellos objetos para los que hay algún objeto relacionado con ellos. Los objetos con esta propiedad son las soluciones de la fórmula: 2 y 3.

La fórmula $\exists yRxy$ expresa, mediante la variable libre x, la propiedad de ser un objeto relacionado con algún objeto. Esta propiedad la tienen 1, 2 y 3 que son pues las soluciones de la fórmula. Obsérvese que lo que importa es *cuál es la variable libre*. En el ejemplo anterior la variable libre era y, ahora lo es la variable x.

Por último, consideremos la fórmula $(Rxy \wedge \neg Ryx)$. Si asignamos 1 a x y 2 a y obtenemos una verdad. También la obtenemos si asignamos 2 a x y 3 a y. Sin embargo, si asignamos 3 a x y 3 a y obtenemos una falsedad. Podemos decir que los pares de objetos $\langle 1,2\rangle$ y $\langle 2,3\rangle$ son soluciones de la fórmula en la estructura $\mathcal{A}$ y que el par $\langle 3,3\rangle$ no lo es. De este modo, vemos que las fórmulas con dos variable libres expresan relaciones binarias entre objetos. Así, la relación que corresponde a la fórmula $(Rxy \wedge \neg Ryx)$, cuando asignamos el primer componente de los pares a x y el segundo a y, es $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$.

Debe tenerse en cuenta que a las variables cuantificadas no se les asignan objetos, son únicamente un recurso para expresar la cuantificación. Así, no tiene sentido preguntarse por las soluciones de una sentencia en una estructura.

En general, dada una estructura $\mathcal{A}$, a cada fórmula $\varphi(x)$ con la única variable libre x le corresponde el conjunto de sus soluciones en $\mathcal{A}$, y a cada fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, cuyas variables libres son $x_1, \dots, x_n$, le corresponde el conjunto de n-tuplos $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ de elementos de A tales que al asignar $a_1, \dots, a_n$ a $x_1, \dots, x_n$, respectivamente, obtenemos una solución de φ en $\mathcal{A}$. De este modo, una sentencia de la forma $\forall x\varphi$ es verdadera en una estructura $\mathcal{A}$ si el conjunto de soluciones de $\varphi(x)$ en $\mathcal{A}$ es A, y una sentencia de la forma $\exists x\varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$ si el conjunto de soluciones de $\varphi(x)$ en $\mathcal{A}$ no es vacío.

Definición de verdad de una sentencia en una estructura

Definiremos ahora con precisión qué significa que una sentencia de un lenguaje de primer orden sea verdadera en una estructura. Lo haremos de modo análogo a como definimos en la lógica proposicional la verdad de una fórmula con respecto a una asignación, mostrando cómo el valor de verdad de una fórmula compuesta depende de modo sistemático del valor de verdad de sus componentes.

Sea $\mathcal{A}$ una estructura para un lenguaje de primer orden L. En el curso de la definición nos veremos obligados a referirnos a elementos de $\mathcal{A}$. Para ello ampliamos el lenguaje L añadiendo nuevas constantes, una para cada elemento de A. Para cada $a \in A$, $\overline{a}$ es la constante que introducimos para nombrar el objeto a. Sea $L(A)$ el lenguaje así ampliado. Igualmente ampliamos la estructura $\mathcal{A}$ a una nueva estructura, que podemos llamar $\mathcal{A}^*$, con el mismo dominio que el de $\mathcal{A}$, que interpreta los símbolos de L igual que $\mathcal{A}$ y que además interpreta $\overline{a}$ como a, simbólicamente,

$$\overline{a}^{\mathcal{A}^*} = a.$$

Puesto que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ son esencialmente la misma estructura, nos referimos a $\mathcal{A}^*$ también con «$\mathcal{A}$».

Definiremos qué significa que una sentencia del lenguaje ampliado $L(A)$ sea **verdadera** en $\mathcal{A}$. De este modo, puesto que las sentencias del lenguaje original L son también sentencias del lenguaje ampliado $L(A)$, habremos también definido cuándo una sentencia del lenguaje original L es verdadera en $\mathcal{A}$.

Puesto que para cada $a \in A$, $\overline{a}$ es una constante de $L(A)$, si α es una fórmula de $L(A)$ y x una variable podemos obtener la sustitución $\alpha(\frac{x}{\overline{a}})$. Así, $\alpha(\frac{x}{\overline{a}})$ es la fórmula de $L(A)$ que se obtiene a partir de la fórmula α reemplazando todas las apariciones libres de la variable x en la fórmula α por apariciones de la constante $\overline{a}$.

Dada una sentencia σ de $L(A)$ con

$$\mathcal{A} \models \sigma$$

expresaremos que σ es **verdadera** en la estructura $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A} \models \sigma$ también diremos que $\mathcal{A}$ es un **modelo** de σ. Obsérvese que ahora utilizamos el símbolo «$\models$» para referirnos a una relación entre estructuras y sentencias. Este símbolo lo hemos utilizado en lógica proposicional para la relación de consecuencia y también lo utilizaremos en lógica de primer orden para este propósito. La ambigüedad que estos dos usos del mismo símbolo puedan introducir es inocua ya que el contexto siempre aclara de cuál se trata. En un caso se trata de una relación entre una estructura y una sentencia y en el otro de una relación entre un conjunto de sentencias y una sentencia.

La definición de verdad de una sentencia de $L(A)$ en la estructura $\mathcal{A}$ es la siguiente:

1. $\mathcal{A} \models c \approx d$ sii $c^{\mathcal{A}} = d^{\mathcal{A}}$,
2. $\mathcal{A} \models Pc$ sii $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$,
3. $\mathcal{A} \models Rc_1 \ldots c_n$ sii $\langle c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_n^{\mathcal{A}} \rangle \in R^{\mathcal{A}}$,
4. $\mathcal{A} \models \neg\sigma$ sii $\mathcal{A} \not\models \sigma$.
5. $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \delta)$ sii $\mathcal{A} \models \sigma$ y $\mathcal{A} \models \delta$.
6. $\mathcal{A} \models (\sigma \vee \delta)$ sii $\mathcal{A} \models \sigma$ o $\mathcal{A} \models \delta$.
7. $\mathcal{A} \models (\sigma \rightarrow \delta)$ sii $\mathcal{A} \not\models \sigma$ o $\mathcal{A} \models \delta$.
8. $\mathcal{A} \models (\sigma \leftrightarrow \delta)$ sii $\mathcal{A} \models \sigma$ y $\mathcal{A} \models \delta$, o, $\mathcal{A} \not\models \sigma$ y $\mathcal{A} \not\models \delta$.
9. $\mathcal{A} \models \forall x\alpha$ sii para cada $a \in A$, $\mathcal{A} \models \alpha\binom{x}{\overline{a}}$,
10. $\mathcal{A} \models \exists x\alpha$ sii para algún $a \in A$, $\mathcal{A} \models \alpha\binom{x}{\overline{a}}$,

donde c, $c_1, \ldots, c_n$ y d son constantes de $L(A)$, P es un símbolo de predicado de L, R es un símbolo relacional n-ario de L, σ y δ son sentencias de $L(A)$ y α es una fórmula de $L(A)$ con a lo sumo la variable x libre.

Si α es una fórmula con a lo sumo la variable x libre, $\mathcal{A}$ es una estructura y a es un objeto del dominio de la estructura $\mathcal{A}$, diremos que α es **satisfecha en $\mathcal{A}$ por a** si y sólo si la sentencia $\alpha\binom{x}{\overline{a}}$ de $L(A)$ es verdadera en $\mathcal{A}$. En tal caso también diremos que el objeto a **satisface la fórmula α en $\mathcal{A}$**, y que α **es verdadera en $\mathcal{A}$ de a**. También podemos decir en este caso, utilizando la terminología introducida anteriormente, que a es una solución de la fórmula $\alpha(x)$ en la estructura $\mathcal{A}$. Para decirlo abreviadamente escribiremos

$$\mathcal{A} \models \alpha[{}^{x}_{a}] \text{ o, simplemente, } \mathcal{A} \models \alpha[a].$$

De modo general, si α es una fórmula de L cuyas variables libres están entre $x_1, \ldots, x_n$ y $a_1, \ldots, a_n$ son elementos del dominio de una estructura $\mathcal{A}$, diremos que la fórmula α es **satisfecha en $\mathcal{A}$ por** $a_1, \ldots, a_n$ (cuando asignamos $a_1, \ldots, a_n$ a $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente) si y sólo si la sentencia $\alpha\binom{x_1, \ldots, x_n}{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n}$ de $L(A)$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Para expresar simbólicamente que α es satisfecha en $\mathcal{A}$ por los objetos $a_1, \ldots, a_n$ escribiremos

$$\mathcal{A} \models \alpha[{}^{x_1, \ldots, x_n}_{a_1, \ldots, a_n}],$$

y si por el contexto está claro cuáles son las variables $x_1, \ldots, x_n$ escribiremos simplemente

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \ldots, a_n].$$

También diremos que α **es verdadera en $\mathcal{A}$ de** los objetos $a_1, \ldots, a_n$ o que $a_1, \ldots, a_n$ **satisfacen α en $\mathcal{A}$**, en lugar de decir que α es satisfecha en $\mathcal{A}$ por los objetos $a_1, \ldots, a_n$. Con las convenciones que acabamos de introducir podemos adaptar las cláusulas (9) y (10) de la definición de verdad a sentencias de L así:

9′. $\mathcal{A} \models \forall x\alpha$ sii para todo $a \in A$, $\mathcal{A} \models \alpha[a]$,
10′. $\mathcal{A} \models \exists x\alpha$ sii existe $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \alpha[a]$,

donde α es una fórmula de L con a lo sumo la variable x libre.

Dada una estructura $\mathcal{A}$ para un lenguaje L y una fórmula α de L cuyas variables libres están entre $x_1, \ldots, x_n$, la relación n-aria en A definida por α es el conjunto

$$\{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n : \mathcal{A} \models \alpha[{}^{x_1, \ldots, x_n}_{a_1, \ldots, a_n}]\}.$$

En particular, si α tiene una única variable libre, el conjunto

$$\{a \in A : \mathcal{A} \models \alpha[{}^{x}_{a}]\}$$

es el subconjunto de A definido por α.

Diremos que una relación n-aria S en A es una **relación definible** en $\mathcal{A}$ si existe una fórmula α de L cuyas variables libres están entre $x_1, \ldots, x_n$ tal que

$$S = \{\langle a_1, \ldots, a \rangle \in A^n : \mathcal{A} \models \alpha[{}^{x_1, \ldots, x_n}_{a_1, \ldots, a_n}]\},$$

es decir, si S es la relación n-aria en A definida por α. En particular, un subconjunto X de A es un **conjunto definible** en $\mathcal{A}$ si existe una fórmula α con una única variable libre x tal que

$$X = \{a \in A : \mathcal{A} \models \alpha[{}^{x}_{a}]\}.$$

El lema de coincidencia y el de sustitución

A continuación presentamos dos lemas que vamos a necesitar en el futuro.

Lema 13.1. (de coincidencia) *Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son estructuras para un lenguaje L que tienen el mismo dominio, es decir, $A = B$. Si φ es una fórmula de L cuyas variables libres están entre $x_1, \ldots, x_n$ y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ interpretan*

del mismo modo los símbolos propios de L que aparecen en φ, entonces para cualesquiera objetos $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[^{x_1,\ldots,x_n}_{a_1,\ldots,a_n}] \quad sii \quad \mathcal{B} \models \varphi[^{x_1,\ldots,x_n}_{a_1,\ldots,a_n}].$$

En particular, si σ es una sentencia y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ interpretan del mismo modo los símbolos propios de L que aparecen en ella,

$$\mathcal{A} \models \sigma \; sii \; \mathcal{B} \models \sigma.$$

La justificación del lema es clara: si recorremos las cláusulas de la definición de verdad en una estructura nos damos cuenta de que la verdad de una sentencia del lenguaje en una estructura depende en última instancia de los valores de verdad de sus subfórmulas atómicas para objetos de la estructura. Y estos valores dependen de cuáles son las interpretaciones en la estructura de los símbolos de la sentencia.

LEMA 13.2. (DE SUSTITUCIÓN) *Si φ es una fórmula con una única variable libre x, c es una constante y $\mathcal{A}$ una estructura,*

$$\mathcal{A} \models \varphi\binom{x}{c} \quad sii \quad \mathcal{A} \models \varphi[c^{\mathcal{A}}].$$

La razón es que en cada estuctura $\mathcal{A}$ la fórmula $\varphi\binom{x}{c}$ expresa que el objeto denotado por c tiene la propiedad expresada por $\varphi(x)$. Puesto que el objeto denotado por c es $c^{\mathcal{A}}$, dice que $c^{\mathcal{A}}$ tiene la propiedad expresada por $\varphi(x)$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models Pc \quad & \text{sii} \quad c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}} \\ & \text{sii} \quad \mathcal{A} \models Px[c^{\mathcal{A}}]. \end{aligned}$$

3. Simbolización

A continuación aplicamos nuestros conocimientos de los lenguajes de primer orden para simbolizar enunciados del lenguaje natural. El proceso de simbolización que seguiremos es el siguiente: partimos de un lenguaje de primer orden y una estructura para el mismo; consideramos distintos enunciados en español que describen propiedades de la estructura; finalmente, para cada uno de ellos damos una sentencia del lenguaje de primer orden que expresa lo mismo que el enunciado.

EJEMPLO 1

Consideremos el lenguaje de primer orden cuyos símbolos propios son dos símbolos de predicado, P y Q, tres constantes c, d y e, y un símbolo relacional

binario R. Consideremos también la estructura cuyo universo es el conjunto de los objetos celestes y que interpreta P como el conjunto de los planetas, Q como el conjunto de los satélites, R como la relación *girar alrededor de*, e interpreta las constantes de modo que c refiere al Sol, d a la Tierra y e a la Luna.

1. La Tierra es un planeta: Pd.
2. La Luna no es un planeta: $\neg Pe$.
3. La Luna es un satélite: Qe.
4. La Tierra gira alrededor del Sol: Rdc.
5. Todo planeta es un satélite:

   $$\forall x(Px \to Qx).$$

   Al afirmar que todo planeta es un satélite estamos afirmando que cualquier objeto que es un planeta es también un satélite, es decir, que para todo objeto x, si x es un planeta, entonces x es un satélite.
6. Todo planeta gira alrededor del Sol:

   $$\forall x(Px \to Rxc).$$

   Es decir, para todo objeto x, si x es planeta entonces x gira alrededor del Sol.
7. Algún planeta gira alrededor de la Luna:

   $$\exists x(Px \land Rxe).$$

   O sea, hay un objeto que es un planeta y gira alrededor de la Luna.
8. Hay por lo menos un satélite: $\exists xQx$.
9. Ningún planeta es un satélite:

   $$\neg\exists x(Px \land Qx) \qquad \text{o} \qquad \forall x(Px \to \neg Qx).$$

   Lo que debemos expresar es que no hay objetos que sean al mismo tiempo un planeta y un satélite. Ello podemos hacerlo de modo natural de las dos maneras indicadas. En el primer caso decimos que no hay objetos con las dos propiedades consideradas y en el segundo que todo objeto que sea un planeta no es un satélite, lo que es equivalente a lo anterior.
10. Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:

    $$\forall x \neg Rxx.$$

    Obsérvese que no debemos expresar la propiedad de ser objeto celeste, puesto que el universo de nuestra estructura, el dominio de objetos de que hablamos, es el conjunto de todos los objetos celestes, de modo que al decir «para todo x» estamos diciendo «para todo objeto celeste x».

11. Alrededor de los satélites no giran objetos celestes:

$$\forall x(Qx \to \neg\exists zRzx) \qquad \text{o} \qquad \neg\exists x(Qx \wedge \exists zRzx).$$

12. Hay exactamente un satélite:

$$\exists x(Qx \wedge \forall y(Qy \to x \approx y)).$$

Para decir que x es el único satélite, decimos que x es un satélite y que todo satélite es igual a x.

EJEMPLO 2

Consideremos ahora el lenguaje de primer orden cuyos símbolos propios son un símbolo de predicado P, tres constantes c, d y e, y dos símbolos relacionales binarios R y S. Consideremos la estructura cuyo universo es, como antes, el conjunto de los objetos celestes y que interpreta P como el conjunto de los planetas, R como la relación *girar alrededor de*, S como la relación *ser un satélite de*, e interpreta las constantes de modo que c refiere al Sol, d a la Tierra y e a la Luna. Observemos que ahora, a diferencia del ejemplo anterior, ningún símbolo se interpreta como el conjunto de los satélites; sin embargo, como veremos, tenemos recursos para expresar la propiedad de ser satélite.

1. La Luna es un satélite de la Tierra: Sed.
2. La Luna es un satélite:

$$\exists xSex.$$

En este lenguaje no podemos expresar la propiedad de ser satélite mediante un símbolo de predicado. Sin embargo, puesto que ser un satélite es ser un satélite de algún objeto celeste, podemos simbolizar el enunciado «la Luna es un satélite» del modo indicado. Compárese con (3) del ejemplo anterior.

Así, vemos que *la simbolización de un enunciado depende del lenguaje de primer orden en que queramos simbolizarlo.*

3. Hay por lo menos un satélite:

$$\exists xySxy.$$

Es decir, existe algún objeto x que es satélite de algún objeto y. Compárese con (8) del ejemplo anterior.

4. Todo planeta tiene un satélite:

$$\forall x(Px \to \exists ySyx).$$

Es decir, para todo objeto x, si x es un planeta, entonces x tiene un satélite, o, en otras palabras, hay un objeto que es satélite de x.

5. Ningún planeta es un satélite:

$$\neg\exists x(Px \wedge \exists ySxy) \qquad \text{o} \qquad \forall x(Px \to \neg\exists ySxy).$$

Compárese con (9) del ejemplo anterior.

6. La Tierra no tiene satélites:

$$\neg\exists xSxd \qquad \text{o} \qquad \forall x\neg Sxd.$$

7. Hay al menos un planeta sin satélites:

$$\exists x(Px \wedge \neg\exists ySyx) \qquad \text{o} \qquad \exists x(Px \wedge \forall y\neg Syx).$$

8. Sólo los planetas tienen satélites:

$$\forall x(\exists ySyx \to Px).$$

El enunciado dice que si un objeto tiene algún satélite, este objeto es un planeta. Pero no dice que todos los planetas tienen satélites. Por ello la simbolización es la dada.

9. Todo satélite es satélite de algún planeta:

$$\forall x(\exists ySxy \to \exists z(Pz \wedge Sxz)).$$

10. La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes:

$$\neg\exists xy(Rex \wedge Rey \wedge \neg x \approx y).$$

EJEMPLO 3

Consideremos ahora el lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado, P y Q, dos símbolos relacionales binarios, R y S, y tres constantes c, d y e. Interpretémoslo en la estructura cuyo universo es el conjunto de los números naturales y que interpreta P como el conjunto de los números pares, Q como el conjunto de los números primos, R como la relación *dividir a*, S como la relación *menor que*, y asigna a la constante c el número 0, a la constante d el número 1 y a la e el número 2. A continuación damos la formalización de algunos enunciados.

1. Algún número es par y primo: $\exists x(Px \wedge Qx)$.
2. Todo número par es primo: $\forall x(Px \to Qx)$.
3. Ningún número par es primo:

$$\forall x(Px \to \neg Qx) \qquad \text{o} \qquad \neg\exists x(Px \wedge Qx).$$

4. Todo número par es divisible por 2:

$$\forall x(Px \to Rex).$$

5. Un número es par si y sólo si es divisible por 2:

$$\forall x(Px \leftrightarrow Rex).$$

Obsérvese la diferencia con (4). Allí tenemos un condicional donde ahora tenemos un bicondicional. En (4) no se dice que los números divisibles por dos son pares, pero en (5) sí.

6. Para cada número hay uno mayor: $\forall x \exists y Sxy$.
7. Para cada número hay uno menor: $\forall x \exists y Syx$. Compárese con (6).
8. Si un número divide a otro, es menor o igual que él:

$$\forall xy(Rxy \to (x \approx y \vee Sxy)).$$

9. Para cada número primo hay un número par mayor que él:

$$\forall x(Qx \to \exists y(Py \wedge Sxy)).$$

10. Los números primos son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad:

$$\forall x(Qx \to ((Rxx \wedge Rdx) \wedge \forall y(Ryx \to (y \approx x \vee y \approx d)))).$$

Debe tenerse en cuenta que nuestro enunciado afirma dos cosas, primero que los números primos son divisibles por sí mismos y por la unidad y segundo que si un número divide a un número primo debe ser igual a él o la unidad. Un modo más compacto de expresar lo anterior es también:

$$\forall x(Qx \to \forall y(Ryx \leftrightarrow (y \approx x \vee y \approx d))).$$

11. Un número es primo si y sólo si es divisible únicamente por sí mismo y por la unidad:

$$\forall x(Qx \leftrightarrow ((Rxx \wedge Rdx) \wedge \forall y(Ryx \to (y \approx x \vee y \approx d))))$$

o también

$$\forall x(Qx \leftrightarrow \forall y(Ryx \leftrightarrow (y \approx x \vee y \approx d))).$$

Obsérvese la diferencia con el enunciado anterior. Allí tenemos un condicional donde ahora hay un bicondicional.

Ejemplo 4

Vamos a simbolizar algunos enunciados que afirman la existencia de un número determinado de objetos con cierta propiedad. Lo haremos con el lenguaje y la interpretación del primer ejemplo.

1. Hay a lo sumo un planeta:

$$\forall xy((Px \wedge Py) \to x \approx y).$$

El enunciado es verdadero si no hay planetas o si hay únicamente un planeta y, por tanto, es falso si hay dos o más planetas. Para simbolizarlo decimos que si x e y son planetas, x e y son iguales.

2. Hay exactamente un planeta:

$$\exists x Px \wedge \forall xy((Px \wedge Py) \to x \approx y).$$

Esta sentencia es la conjunción de la que expresa que hay al menos un planeta y de la que expresa que hay a lo sumo uno. Expresa, pues, que hay exactamente uno. Podemos simbolizar el enunciado también mediante

$$\exists x(Px \wedge \forall y(Py \to x \approx y)).$$

Con esta sentencia decimos que hay un planeta y que cualquier planeta es igual a él.

3. Hay al menos dos planetas:

$$\exists xy((Px \wedge Py) \wedge \neg x \approx y).$$

Obsérvese que si hay tres planetas o más la sentencia es verdadera, pues en todos estos casos hay dos objetos distintos que son planetas. Debemos decir explícitamente que x e y son distintos. Si hubiésemos simbolizado nuestro enunciado mediante $\exists xy(Px \wedge Py)$ estaríamos diciendo que hay un objeto que es un planeta y hay un objeto que es un planeta, pero podría tratarse en ambos casos del mismo objeto. Por tanto, la simbolización no expresaría que hay al menos dos.

4. Hay a lo sumo dos planetas:

$$\forall xyz((Px \wedge Py \wedge Pz) \to (x \approx y \vee x \approx z \vee y \approx z)).$$

El enunciado es verdadero si no hay planetas, si hay un planeta y si hay dos planetas, pero es falso si hay más de dos planetas. Por ello debemos decir que si x, y y z son planetas no pueden ser los tres distintos, es decir que uno de ellos tiene que ser igual a otro.

5. Hay exactamente dos planetas:

$$\exists xy(((Px \land Py) \land \neg x \approx y) \land \forall z(Pz \to (z \approx x \lor z \approx y)))$$

Fijémonos que con esta sentencia decimos que hay dos planetas distintos y que cualquier planeta es uno de ellos dos. De este modo expresamos que hay dos y sólo dos.

Otro modo menos compacto, pero más obvio, de simbolizar el enunciado consiste en formar la conjunción de las simbolizaciones de (3) y (4).

$$\exists xy((Px \land Py) \land \neg x \approx y) \land \forall xyz(((Px \land Py) \land Pz) \to (x \approx y \lor x \approx z \lor y \approx z)).$$

4. Ejercicios

1. Consideremos el lenguaje cuyos símbolos propios son los símbolos de predicado P y Q, los símbolos relacionales binarios R y S, y las constantes c y d. Consideremos la estructura $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$ donde

$A = \{1,2,3,4\}$,

$P^{\mathcal{A}} = \{1,3\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$,

$R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,1\rangle\}$,

$S^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 1,1\rangle\}$,

$c^{\mathcal{A}} = 1$ y $d^{\mathcal{A}} = 2$.

¿Cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas en $\mathcal{A}$?

(1) Pc,
(2) $\neg Pd$,
(3) $(Pc \land Qd)$,
(4) $(Pc \to \neg Qd)$,
(5) $\exists x Qx$,
(6) $\exists x(Px \land Qx)$,
(7) $\forall x Qx$,
(8) $\forall x(Px \to Qx)$,
(9) $\forall x(Qx \to \neg Px)$,
(10) $\forall x(Qx \to \exists y(Px \lor Qy))$,
(11) $\forall x Rcx$,
(12) $\forall x Scx$,
(13) $\forall x(Rcx \to Scx)$,
(14) $\exists y \forall x(Rcx \to Scx)$,
(15) $\forall xy(Rxy \to Sxy)$,
(16) $\forall xy(Rxy \to \exists z Sxz)$,
(17) $\forall x(Px \to \exists y Rxy)$,
(18) $\forall x(Px \to \exists y(Sxy \land Ryx))$.

2. Consideremos el mismo lenguaje y la misma estructura que en el ejercicio anterior. ¿Cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas en $\mathcal{A}$?

(1) $\forall x \exists y Rxy$,
(2) $\forall x \exists y Sxy$,
(3) $\exists y \forall x Rxy$,
(4) $\exists y \forall x Sxy$,
(5) $\exists y \forall x Ryx$,
(6) $\forall xyz((Sxy \land Syz) \to Rxz)$,
(7) $\forall xy(Rxy \to \neg Ryx)$,
(8) $\forall xy(\neg Sxy \to \neg Rxy)$,
(9) $\forall xy(\exists z(Rxz \land Rzy) \to Rxy)$,
(10) $\forall xy(\exists z(Rxz \land Szy) \to Rxy)$,
(11) $\forall xy(\exists z(Sxz \land Rzy) \to Rxy)$,
(12) $\forall xy(\exists z(Rxz \land Rzy) \to Sxy)$,
(13) $\forall x(Px \to \exists y Ryx)$,
(14) $\forall x(x \approx c \to \exists y Ryx)$,
(15) $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$,
(16) $\forall x(x \approx d \leftrightarrow Rcx)$.

3. Consideremos las siguientes sentencias:

(1) $\forall x(Px \to Qx)$,
(2) $\forall x(Qx \to Lx)$,
(3) $\exists x \neg Px$,
(4) $\exists x \neg Qx$,
(5) $\forall x Lx$.

Si existen, encuentre estructuras en las que:

(a) Las sentencias (2), (3) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.
(b) Las sentencias (2), (4) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.
(c) Las sentencias (2) y (3) sean verdaderas y las restantes falsas.
(d) Las sentencias (1), (2) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.
(e) Las sentencias (2), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.
(f) Las sentencias (1), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.
(g) Las sentencias (1), (2) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.
(h) Todas las sentencias sean verdaderas.
(i) Todas las sentencias sean falsas.

4. Consideremos las siguientes sentencias:

(1) $\forall x(Px \to \exists y Rxy)$,
(2) $\forall x(Qx \to \exists y Ryx)$,
(3) $\exists x(Px \land Qx)$,
(4) $\forall x \exists y Rxy$,
(5) $\exists x \exists y \neg Rxy$.

Si existen, encuentre estructuras en las que:

(a) Las sentencias (1), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.
(b) Las sentencias (1), (2) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.
(c) Las sentencias (2), (3) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.
(d) Las sentencias (2), (4) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.

(e) Las sentencias (2) y (3) sean verdaderas y las restantes falsas.
(f) Las sentencias (2), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.
(g) Todas las sentencias sean verdaderas.
(h) Todas las sentencias sean falsas.

5. Consideremos las siguientes sentencias:

(1) $\forall x(\exists y Rxy \rightarrow Px)$,
(2) $\forall x(Px \rightarrow Qx)$,
(3) $\exists x(Qx \wedge \forall y \neg Rxy)$,
(4) $\exists x Rxx$,
(5) $\exists x \neg Rxx$.

Si existen, encuentre estructuras en las que:

(a) Las sentencias (1), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.
(b) Las sentencias (1), (2) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.
(c) Las sentencias (2), (3) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.
(d) Las sentencias (2), (4) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.
(e) Las sentencias (2) y (3) sean verdaderas y las restantes falsas.
(f) Las sentencias (1), (2) y (4) sean falsas y las restantes verdaderas.
(g) Las sentencias (2), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.
(h) Todas las sentencias sean verdaderas.
(i) Todas las sentencias sean falsas.

6. Consideremos el lenguaje cuyos símbolos propios son los símbolos de predicado P y Q, los símbolos relacionales binarios R y S, y la constante c. Consideremos la estructura $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle$, donde

$A = \{1,2,3,4,5\}$,

$P^{\mathcal{A}} = \{1,2,3\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{3,5\}$,

$R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$, $S^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$,

y $c^{\mathcal{A}} = 1$.

¿Cuáles son las soluciones de las siguientes fórmulas con una variable libre?

(1) $(Px \wedge Qx)$,
(2) $(Px \vee Qx)$,
(3) $(Px \rightarrow Qx)$,
(4) $(Px \leftrightarrow Qx)$,
(5) $(Px \vee \neg Qx)$,
(6) $(Px \wedge \neg Qx)$,
(7) $(Px \rightarrow \neg Qx)$,
(8) $(Px \leftrightarrow \neg Qx)$,
(9) $(\neg Px \wedge \neg Qx)$,
(10) $(\neg Px \vee \neg Qx)$,

(11) $\exists x Rxy$,
(12) $\exists x Ryx$,
(13) $\exists x(Rxy \wedge Sxy)$,
(14) $\exists x(Rxy \vee Sxy)$,
(15) $\forall x(Px \rightarrow Rxy)$,
(16) $\forall x((Px \wedge Qx) \rightarrow \neg Rxy)$,
(17) $\exists x(Px \wedge Sxy)$,
(18) $\exists x(Qx \vee Rxy)$,
(19) $\forall x(\exists y Rxy \rightarrow Rxz)$,
(20) $\forall x(\exists y Sxy \rightarrow Rxz)$,
(21) $\forall x(Rxz \rightarrow \exists y Rxy)$,
(22) $\forall x(Rxz \rightarrow \exists y Sxy)$.

7. Consideremos el mismo lenguaje y la misma estructura que en el ejercicio anterior. ¿Cuáles son los pares de objetos que son soluciones de las siguientes fórmulas con dos variables libres, la x y la y? (Debe entenderse que el primer componente del par se asigna a la variable x y el segundo a la y.)

(1) $(Px \wedge Qy)$,
(2) $(Py \wedge Qx)$,
(3) $(Px \vee Qy)$,
(4) $(Px \rightarrow Qy)$,
(5) $(Rxy \wedge Sxy)$,
(6) $\neg Rxy$,
(7) $(Rxy \wedge Ryx)$,
(8) Ryx,
(9) $(Rxx \wedge Sxy)$,
(10) $(\neg Rxx \wedge Sxy)$,
(11) $\exists z(Rxz \vee Py)$,
(12) $\exists z(Rxz \vee Syz)$,
(13) $\exists z(Rxz \wedge Szy)$,
(14) $\forall z(Rxz \rightarrow Syz)$,
(15) $((Px \vee Qx) \wedge Rxy)$.

8. Consideremos el mismo lenguaje L del ejercicio anterior. Encuentre fórmulas con exactamente una variable libre (la x por ejemplo) tales que, para cualquier estructura $\mathcal{A}$ para L, su conjunto de soluciones es:

(1) El complemento de $P^{\mathcal{A}}$.
(2) La unión de $P^{\mathcal{A}}$ con $Q^{\mathcal{A}}$.
(3) La intersección de $P^{\mathcal{A}}$ con $Q^{\mathcal{A}}$.
(4) La unión del complemento de $P^{\mathcal{A}}$ con $Q^{\mathcal{A}}$.
(5) La diferencia de $Q^{\mathcal{A}}$ con $P^{\mathcal{A}}$.
(6) La intersección de $P^{\mathcal{A}}$ con su complemento.
(7) La diferencia de $P^{\mathcal{A}}$ con el complemento de $Q^{\mathcal{A}}$.
(8) La intersección de $P^{\mathcal{A}}$ con el complemento de $Q^{\mathcal{A}}$.

9. Consideremos el mismo lenguaje L del ejercicio anterior. Encuentre fórmulas con exactamente dos variables libres (x e y por ejemplo) tales que, para cualquier estructura $\mathcal{A}$ para L, su conjunto de soluciones es:

(1) La inversa de $R^{\mathcal{A}}$.
(2) La unión de $R^{\mathcal{A}}$ con $S^{\mathcal{A}}$.
(3) El producto relacional de $R^{\mathcal{A}}$ con $R^{\mathcal{A}}$.
(4) El producto relacional de $R^{\mathcal{A}}$ con $S^{\mathcal{A}}$.

(5) El producto relacional de $S^{\mathcal{A}}$ con la inversa de $R^{\mathcal{A}}$.

(6) La intersección de $R^{\mathcal{A}}$ con su inversa.

(7) La unión de $R^{\mathcal{A}}$ con el complemento de $S^{\mathcal{A}}$.

(8) La intersección de $R^{\mathcal{A}}$ con el complemento de la inversa de $S^{\mathcal{A}}$.

(9) El producto relacional del complemento de $R^{\mathcal{A}}$ con la inversa de $S^{\mathcal{A}}$.

(10) El producto relacional del complemento de la inversa de $R^{\mathcal{A}}$ con el complemento de $S^{\mathcal{A}}$.

10. Consideremos el lenguaje con un símbolo relacional binario R y un símbolo de predicado Q y la estructura $\mathcal{A} = \langle A, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$ donde $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{2,4,6,8\}$ y $R^{\mathcal{A}}$ se define por:

$$nR^{\mathcal{A}}m \text{ sii } n < m.$$

Halle cuatro fórmulas α_1, α_2, α_3 y α_4 con únicamente la variable x libre cuyas soluciones en $\mathcal{A}$ sean $1, 2, 8$ y 9, respectivamente.

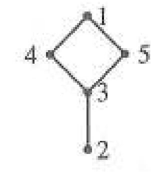
11. Considere el lenguaje de primer orden cuyo único símbolo propio es el símbolo relacional binario R y la estructura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$, donde $A = \{1,2,3,4\}$ y $R^{\mathcal{A}}$ es el orden parcial reflexivo representado por el diagrama

1 4
3
2

Halle dos fórmulas α_1 y α_2 con únicamente la variable libre x cuyas únicas soluciones en $\mathcal{A}$ sea el número 2 y el número 3, respectivamente. Halle también una fórmula α_3 con únicamente la variable libre x cuyas soluciones en $\mathcal{A}$ sean los números 1 y 4. No es posible hallar una fórmula abierta cuya única solución sea el número 1, ni una cuya única solución sea 4.

Ampliemos ahora el lenguaje con una constante c y ampliemos la estructura de modo que $c^{\mathcal{A}} = 1$. Halle una fórmula con únicamente la variable libre x cuya única solución en $\mathcal{A}$ sea el número 1 y otra cuya única solución sea el número 4.

12. Considere el lenguaje de primer orden cuyo único símbolo propio es el símbolo relacional binario R y la estructura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$, donde $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $R^{\mathcal{A}}$ es el orden parcial reflexivo representado por el diagrama

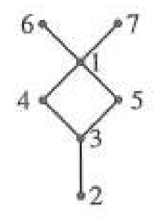


Halle tres fórmulas α_1, α_2 y α_3 con únicamente la variable libre x cuyas únicas soluciones en $\mathcal{A}$ sean el número 1, el número 2 y el número 3, respectivamente.

Halle también una fórmula α_4 con únicamente la variable libre x cuyas soluciones en $\mathcal{A}$ sean los números 4 y 5.

Añadamos ahora una constante c al lenguaje y ampliemos la estructura de modo que $c^{\mathcal{A}} = 5$. Halle una fórmula con con únicamente la variable libre x cuya única solución en $\mathcal{A}$ es el número 4 y otra fórmula cuya única solución es el número 5.

13. Considere el lenguaje de primer orden cuyo único símbolo propio es el símbolo relacional binario R y la estructura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$, donde $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $R^{\mathcal{A}}$ es el orden parcial reflexivo representado por el diagrama



Encuentre tres fórmulas α_1, α_2 y α_3 con únicamente la variable libre x cuyas únicas soluciones en $\mathcal{A}$ sean, respectivamente, los números 1, 2 y 3. Encuentre además dos fórmulas α_4 y α_5 con únicamente la variable libre x cuyas soluciones en $\mathcal{A}$ sean, respectivamente, los números 4 y 5 y los números 6 y 7. Añadamos ahora dos constantes c y d al lenguaje y ampliemos la estructura de modo que $c^{\mathcal{A}} = 5$ y $d^{\mathcal{A}} = 6$. Encuentre una fórmula con únicamente la variable libre x cuya única solución en $\mathcal{A}$ es el número 4, otra cuya única solución es el número 5, otra cuya única solución es 6 y, finalmente, otra cuya única solución es el número 7.

14. Consideremos el lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado P y Q, tres símbolos relacionales binarios R, S y T y tres constantes c, d, e. Interpretémoslo en la estructura cuyo dominio es el conjunto de las personas de modo que la interpretación de P es el conjunto de los hombres, la de Q el conjunto de las mujeres, la de R la relación «x es progenitor de y», la de S la relación «x es hermano de y», la de T la relación «x es antepasado de y», y las constantes c, d y e denotan a Carlos, Dora y Ester, respectivamente. Simbolice con estos recursos las siguientes oraciones.

(1) Dora es madre de Ester.

(2) Dora es tía de Carlos.

(3) Carlos es abuelo de Dora.

(4) Dora es nieta de Carlos.

(5) Todo el mundo tiene padre.

(6) Todo el mundo tiene dos progenitores.

(7) Nadie es progenitor de sí mismo.

(8) Algunos no tienen hermanos.

(9) Los antepasados de Dora son antepasados de Ester.

(10) Hay quienes tienen hijos y quienes no.

(11) Dos personas son hermanas si y sólo si tienen los mismos progenitores.

(12) Dora es hermana de un hijo de Carlos.
(13) Un progenitor de un antepasado es un antepasado.
(14) Los padres son antepasados.
(15) Nadie es progenitor de sus hermanos.
(16) Toda persona tiene una única madre.
(17) Dora es abuela materna de Ester.
(18) Ester es bisabuela de Carlos.
(19) Todos tienen abuelos.
(20) Todos tienen bisabuelos.
(21) Algunos antepasados de Dora no son antepasados de Ester.
(22) Dora tiene por lo menos dos hermanos.
(23) Dora tiene a lo sumo dos hermanos.
(24) Dora tiene exactamente dos hermanos.
(25) Dora y Carlos tienen exactamente tres antepasados en común.

15. Simbolice los siguientes enunciados en el lenguaje de primer orden del ejemplo 1 de la sección sobre simbolización.

(1) Hay al menos tres planetas.
(2) Hay a lo sumo tres planetas.
(3) Hay exactamente tres planetas.

De modo análogo, para cada número natural n mayor que 3 puede expresarse que hay n planetas, que hay a lo sumo n planetas y que hay exactamente n planetas. Piense, por ejemplo, cómo hacerlo en los casos de $n = 4$ y $n = 5$. De modo aún más general, si tenemos una propiedad que podemos simbolizar con una fórmula $\varphi(x)$, puede expresarse con su ayuda, para cada $n \leq 1$, que hay al menos n objetos con la propiedad, o que hay a lo sumo n o que hay exactamente n, utilizando fórmulas parecidas pero en las que aparece $\varphi(x_i)$ en lugar de Px_i, para cada i entre 0 y $n+1$. Piense cómo hacerlo.

16. Consideremos un lenguaje de primer orden cualquiera y una estructura para el mismo. Simbolice los siguientes enunciados:

(1) Hay al menos un objeto.
(2) Hay exactamente un objeto.
(3) Hay a lo sumo un objeto.
(4) Hay al menos dos objetos.
(5) Hay a lo sumo dos objetos.
(6) Hay exactamente tres objetos.

Piense cómo simbolizar para un número n cualquiera que hay al menos n objetos, que hay a lo sumo n y que hay exactamente n.

17. Justifique que en una estructura $\mathcal{A}$ para un lenguaje L los conjuntos $\emptyset$ y A son definibles en $\mathcal{A}$. Demuestre también que si dos subconjuntos X e Y de A son definibles en $\mathcal{A}$ también lo son $X \cup Y$, $X \cap Y$ y $X - Y$.

18. Justifique que si en una estructura $\mathcal{A}$ para un lenguaje L una relación binaria R en A es definible en $\mathcal{A}$, también lo es su complemento, su inversa, y el producto relacional $R|R$.

19. Justifique que en toda estructura $\mathcal{A}$ para un lenguaje L, si R y S son relaciones binarias en A definibles en $\mathcal{A}$, entonces también son definibles $R|S$, $R|S$ y $S|R$.

Capítulo 14

VERDAD, EQUIVALENCIA Y CONSECUENCIA LÓGICA

1. Verdad lógica

Decimos que una sentencia de un lenguaje de primer orden L es **universalmente válida**, **lógicamente válida** o, simplemente, una **verdad lógica** si es verdadera en toda estructura para L.

No es difícil ver que *todas las sentencias que tienen la forma de una tautología son verdades lógicas.* En cada caso la justificación es la misma que en lógica proposicional, con la única diferencia de que ahora decimos «verdad en una estructura» en lugar de «verdad con una asignación». Así, la sentencia

$$(\exists xPx \wedge \forall xQx) \to \forall xQx,$$

de la forma $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$, es una verdad lógica, puesto que en toda estructura $\mathcal{A}$, si en $\mathcal{A}$ es verdadero su antecedente $\exists xPx \wedge \forall xQx$, también debe serlo su consecuente $\forall xQx$. Este tipo de sentencias son verdades lógicas en virtud de la semántica de las conectivas. Pero como vamos a ver, hay otras sentencias cuya validez lógica depende además de la semántica de los cuantificadores.

Proposición 14.1. *Si φ es una fórmula con a lo sumo la variable x libre y c es una constante, las sentencias siguientes son verdades lógicas*

(1) $\forall x(\varphi \to \varphi)$,

(2) $\forall x\varphi \to \varphi\binom{x}{c}$,

(3) $\varphi\binom{x}{c} \to \exists x\varphi$,

(4) $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$.

Demostración. (1) Sea φ una fórmula con a lo sumo la variable x libre y sea $\mathcal{A}$ una estructura. Debemos ver que para cada $a \in A$, la fórmula $\varphi \to \varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$ del objeto a. Es decir, que la sentencia $\varphi\binom{x}{\underline{a}} \to \varphi\binom{x}{\underline{a}}$, del lenguaje ampliado, es verdadera en $\mathcal{A}$. Pero esto es claro por razones proposicionales, por tratarse de un condicional con antecedente y consecuente iguales.

(2) Consideremos una fórmula φ con a lo sumo la variable x libre, y sea $\mathcal{A}$ una estructura cualquiera. Debemos ver que si $\forall x\varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$ también lo es $\varphi\binom{x}{c}$. Supongamos, pues, que $\forall x\varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Por tanto, para cada $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[a]$. En particular, $\mathcal{A} \models \varphi[c^{\mathcal{A}}]$. Por el lema de sustitución obtenemos que $\mathcal{A} \models \varphi\binom{x}{c}$.

(3) Sea φ una fórmula con a lo sumo la variable x libre y sea $\mathcal{A}$ una estructura arbitraria. Debemos ver que si $\varphi\binom{x}{c}$ es verdadera en $\mathcal{A}$, también lo es $\exists x\varphi$. Supongamos, pues, que $\varphi\binom{x}{c}$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Así, por el lema de sustitución, φ es verdadera en $\mathcal{A}$ del objeto $c^{\mathcal{A}}$ y, por tanto, la sentencia $\exists x\varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$.

(4) Se sigue fácilmente de (2) y (3). □

Proposición 14.2. *Si φ y ψ son fórmulas con a lo sumo la variable x libre, las sentencias siguientes son verdades lógicas*

(1) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$,

(2) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$.

Demostración. (1) Sean φ y ψ dos fórmulas con a lo sumo la variable x libre y sea $\mathcal{A}$ una estructura. Para ver que la sentencia $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ es verdadera en $\mathcal{A}$ basta ver que si su antecedente es verdadero en $\mathcal{A}$ también lo es su consecuente. Supongamos pues que $\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)$. Debemos concluir que $\mathcal{A} \models \forall x\varphi \to \forall x\psi$. Si el antecedente de esta sentencia condicional es falso en $\mathcal{A}$, el condicional ya es verdadero. Supongamos pues que el antecedente $\forall x\varphi$ es verdadero en $\mathcal{A}$. Debemos mostrar que también lo es su consecuente $\forall x\psi$, es decir, debemos ver que para cada $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}]$. Sea pues a un elemento arbitrario de A. Puesto que $\forall x(\varphi \to \psi)$ es verdadera en $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}]$, es decir,

$$\text{si } \mathcal{A} \models \varphi[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}], \text{ entonces } \mathcal{A} \models \psi[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}].$$

Puesto que, por suposición, $\forall x\varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{A} \models \varphi[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}]$. Por tanto obtenemos que $\mathcal{A} \models \psi[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}]$, como queríamos mostrar.

(2) Sean φ y ψ fórmulas con a lo sumo la variable x libre y sea $\mathcal{A}$ una estructura. Debemos ver que en $\mathcal{A}$ es verdadera la sentencia

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi).$$

Puesto que es una sentencia condicional, supongamos que su antecedente es verdadero en $\mathcal{A}$ y veamos que también lo es su consecuente $\exists x\varphi \to \exists x\psi$. Para ello supongamos que $\mathcal{A} \models \exists x\varphi$ y veamos que $\exists x\psi$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Sea, pues, $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}]$ (tal a existe, ya que $\mathcal{A} \models \exists x\varphi$). Puesto que, por suposición, $\forall x(\varphi \to \psi)$ es verdadera en $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}]$, es decir,

$$\text{si } \mathcal{A} \models \varphi[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}], \text{ entonces } \mathcal{A} \models \psi[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}].$$

Por tanto, $\mathcal{A} \models \psi[^{x}_{a}]$; con lo cual tenemos que $\exists x\psi$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Concluimos, pues, que $\mathcal{A} \models \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi$. □

PROPOSICIÓN 14.3. *Si φ es una fórmula con a lo sumo dos variables libres x, y, la sentencia*

$$\exists x\forall y\varphi \rightarrow \forall y\exists x\varphi$$

es una verdad lógica.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una fórmula φ con a lo sumo las variables libres x y y y sea $\mathcal{A}$ una estructura cualquiera. Veamos que la sentencia $\exists x\forall y\varphi \rightarrow \forall y\exists x\varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Si el antecedente es falso, la sentencia es verdadera. Supongamos, pues, que $\mathcal{A} \models \exists x\forall y\varphi$ y veamos que $\mathcal{A} \models \forall y\exists x\varphi$, es decir, que para cada elemento $a \in A$, $\mathcal{A} \models \exists x\varphi[^{y}_{a}]$. Sea pues a un elemento arbitrario de $\mathcal{A}$ y veamos que $\mathcal{A} \models \exists x\varphi[^{y}_{a}]$. Puesto que $\exists x\forall y\varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$, sea b un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \forall y\varphi[^{x}_{b}]$. Así, para el objeto a tenemos que

$$\mathcal{A} \models \varphi[^{x,y}_{b,a}].$$

Obviamente $\mathcal{A} \models \varphi[^{x,y}_{b,a}]$ sii $\mathcal{A} \models \varphi[^{y,x}_{a,b}]$, pues $\varphi\binom{x}{b}\binom{y}{a} = \varphi\binom{y}{a}\binom{x}{b}$. Por tanto, $\mathcal{A} \models \exists x\varphi[^{y}_{a}]$, que es lo que queríamos obtener. □

Las verdades lógicas de la proposición siguiente expresan las propiedades esenciales de la igualdad, a saber, la reflexividad, la simetría, la transitividad y la sustituibilidad de iguales por iguales.

PROPOSICIÓN 14.4. *Las sentencias siguientes son verdades lógicas*

(1) $\forall x\, x \approx x$,

(2) $\forall xy(x \approx y \rightarrow y \approx x)$,

(3) $\forall xyz((x \approx y \wedge y \approx z) \rightarrow x \approx z)$,

(4) $\forall xy((\varphi \wedge x \approx y) \rightarrow \varphi\binom{x}{y})$, *para cada fórmula φ con a lo sumo la variable x libre y para cada variable y que no aparece en φ.*

DEMOSTRACIÓN. (1), (2) y (3) son obvias. Para justificar (4) supongamos que y es una variable que no aparece en φ y consideremos una estructura arbitraria $\mathcal{A}$. Debemos ver que cualesquiera objetos $a, b \in A$ que satisfacen el antecedente también satisfacen el consecuente. Supongamos pues que a y b satisfacen el antecedente. Así, $a = b$ y a satisface φ. Por tanto, b satisface φ, o sea, $\mathcal{A} \models \varphi[^{x}_{b}]$. Ahora bien, puesto que y no aparece en φ, $\varphi\binom{x}{b}$ es precisamente $\varphi\binom{x}{y}\binom{y}{b}$. Por tanto, b también satisface $\varphi\binom{x}{y}$. □

2. Equivalencia lógica

Decimos que dos sentencias de un lenguaje de primer orden son **lógicamente equivalentes** si son verdaderas en exactamente las mismas estructuras. Este concepto puede generalizarse a fórmulas cualesquiera. Dos fórmulas φ y ψ con las mismas variables libres $x_1, \ldots, x_n$ son lógicamente equivalentes si y sólo si son satisfechas en exactamente las mismas estructuras por los mismos objetos. Dicho con más precisión, dos fórmulas φ y ψ con las mismas variables libres $x_1, \ldots, x_n$ son lógicamente equivalentes si y sólo si para cualquier estructura $\mathcal{A}$ y cualesquiera objetos $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[^{x_1,\ldots,x_n}_{a_1,\ldots,a_n}] \quad \text{sii} \quad \mathcal{A} \models \psi[^{x_1,\ldots,x_n}_{a_1,\ldots,a_n}].$$

Como en el caso de la lógica proposicional, la relación de equivalencia lógica es reflexiva, simétrica y transitiva. Además, todos los principios de equivalencia lógica válidos en la lógica proposicional valen también para la lógica de primer orden, puesto que la interpretación de las conectivas en lógica de primer orden es la misma que en lógica proposicional. Como entonces, escribiremos

$$\varphi \equiv \psi$$

para indicar que φ es lógicamente equivalente a ψ.

PROPOSICIÓN 14.5. (CAMBIO DE VARIABLES) *Si φ y ψ son fórmulas y la variable y no aparece en φ,*

(1) $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi\binom{x}{y}$,

(2) $\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi\binom{x}{y}$.

DEMOSTRACIÓN. Justificaremos (1) para el caso en que a lo sumo x está libre en φ. La demostración del caso general se obtiene de modo análogo considerando una asignación arbitraria de objetos a las variables libres de φ y ψ distintas de x.

Consideremos una estructura $\mathcal{A}$ y un elemento $a \in A$. Tenemos que

$$\mathcal{A} \models \forall x\varphi \quad \text{sii} \quad \text{para cada } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi\binom{x}{a}.$$

Puesto que la variable y no aparece en φ, $\varphi\binom{x}{a}$ es la misma fórmula que $\varphi\binom{x}{y}\binom{y}{a}$. Así,

$$\mathcal{A} \models \forall x\varphi \quad \text{sii} \quad \text{para cada } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi\binom{x}{y}\binom{y}{a}.$$

Con lo cual,

$$\mathcal{A} \models \forall x\varphi(x) \quad \text{sii} \quad \mathcal{A} \models \forall y\varphi\binom{x}{y}.$$

La justificación de (2) es análoga. □

PROPOSICIÓN 14.6. (DISTRIBUTIVIDAD) *Si* φ *y* ψ *son fórmulas cualesquiera,*

(1) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$,

(2) $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi$.

DEMOSTRACIÓN. Justificaremos (1) y (2) para el caso en que a lo sumo x está libre en φ y en ψ. Como en la proposición anterior, la demostración del caso general se obtiene de modo análogo considerando una asignación arbitraria de objetos a las variables libres de φ y ψ distintas de x.

(1) Supongamos que $\forall x(\varphi\wedge\psi)$ es verdadera en una estructura $\mathcal{A}$. Así, para cada $a \in A$, $\varphi \wedge \psi$ es verdadera de a, de modo que para cada $a \in A$, φ y ψ son ambas verdaderas de a. Por tanto, $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$ y $\mathcal{A} \models \forall x\psi$, con lo que $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Por otra parte, si $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ es verdadera en $\mathcal{A}$, también lo son $\forall x\varphi$ y $\forall x\psi$. Por tanto, dado $a \in A$, φ y ψ son ambas verdaderas en $\mathcal{A}$ de a, con lo cual lo es su conjunción $\varphi \wedge \psi$. Concluimos, pues, que $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ es verdadera en $\mathcal{A}$.

(2) Supongamos que $\exists x(\varphi\vee\psi)$ es verdadera en una estructura $\mathcal{A}$. Así, hay $a \in A$ tal que $\varphi \vee \psi$ es verdadera de a, de modo que hay $a \in A$ tal que φ o ψ son verdaderas de a. Por tanto, $\mathcal{A} \models \exists x\varphi$ o $\mathcal{A} \models \exists x\psi$, con lo que $\exists x\varphi \vee \exists x\psi$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Por otra parte, si $\exists x\varphi \vee \exists x\psi$ es verdadera en $\mathcal{A}$, lo es $\exists x\varphi$ o lo es $\exists x\psi$. Por tanto, existe $a \in A$ tal que φ es verdadera en $\mathcal{A}$ de a o existe $b \in A$ tal que ψ es verdadera en $\mathcal{A}$ de b. En ambos casos existe un elemento de A del que $\varphi \vee \psi$ es verdadera. Concluimos, pues, que $\exists x(\varphi \vee \psi)$ es verdadera en $\mathcal{A}$. □

No hay distributividad del cuantificador existencial respecto a la conjunción. Por ejemplo, la fórmula $\exists x(Px \wedge Qx)$ *no es lógicamente equivalente a* $\exists xPx \wedge \exists xQx$. Para verlo, obsérvese que «hay un número primo y hay un número divisible por cuatro» es un enunciado verdadero pero «hay un número primo divisible por cuatro» es falso. De modo análogo, no hay distributividad del cuantificador universal respecto a la disyunción. Por ejemplo, la fórmula $\forall x(Px \vee Qx)$ *no es lógicamente equivalente a* $\forall xPx \vee \forall xQx$. Para darse cuenta de ello, obsérvese que es verdadero que todo número es par o impar pero es falso que todo número es par o todo número es impar.

PROPOSICIÓN 14.7. (EQUIVALENCIA DE CUANTIFICADORES) *Si* φ *y* ψ *son fórmulas cualesquiera,*

(1) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$,

(2) $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$,

(3) $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$,

(4) $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$.

DEMOSTRACIÓN. Como en las proposiciones anteriores, justificaremos (1) para el caso en que a lo sumo x está libre en φ puesto que la demostración del caso general se obtiene de modo análogo considerando una asignación arbitraria de objetos a las variables libres de φ distintas de x.

La justificación de (1) es:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A} \models \neg\forall x\varphi & \text{sii} \quad \mathcal{A} \not\models \forall x\varphi \\ & \text{sii} \quad \text{hay algún } a \in A \text{ tal que } \mathcal{A} \not\models \varphi[^x_a] \\ & \text{sii} \quad \text{hay algún } a \in A \text{ tal que } \mathcal{A} \models \neg\varphi[^x_a] \\ & \text{sii} \quad \mathcal{A} \models \exists x\neg\varphi \end{array}$$

La justificación de (2) es similar. (3) se sigue de (2) y (4) de (1), recordando que para toda fórmula α, $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$. □

PROPOSICIÓN 14.8. (CUANTIFICACIÓN VACUA) *Si* ψ *es una fórmula donde la variable* x *no aparece libre,*

(1) $\psi \equiv \forall x\psi$,

(2) $\psi \equiv \exists x\psi$.

En particular, si σ *es una sentencia,* $\sigma \equiv \forall x\sigma$ *y* $\sigma \equiv \exists x\sigma$.

La demostración de esta proposición es inmediata.

PROPOSICIÓN 14.9. *Si* φ *y* ψ *son fórmulas y la variable* x *no aparece libre en* ψ,

(1) $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\varphi \vee \psi$,

(2) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\varphi \wedge \psi$.

DEMOSTRACIÓN. Justificaremos (1) para el caso en que a lo sumo x está libre en φ y ψ es una sentencia. La demostración del caso general se obtiene de modo análogo considerando una asignación arbitraria de objetos a las variables libres de φ y ψ distintas de x.

Supongamos en primer lugar que $\forall x(\varphi \vee \psi)$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Así, para cada $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[^x_a]$. Ahora bien, si ψ es verdadera en $\mathcal{A}$, también lo es $\forall x\varphi \vee \psi$. Si ψ es falsa en $\mathcal{A}$, entonces debe ocurrir que para cada $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[^x_a]$, y por tanto que $\forall x\varphi$ es verdadera en $\mathcal{A}$, con lo cual lo es $\forall x\varphi \vee \psi$.

Por otro lado, si $\forall x\varphi \vee \psi$ es verdadera en $\mathcal{A}$ y ψ es verdadera en $\mathcal{A}$, para cada $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[^x_a]$. Y si ψ es falsa en $\mathcal{A}$ entonces $\forall x\varphi$ es verdadera en tal estructura. Por tanto, $\mathcal{A} \models \varphi[^x_a]$ para cada $a \in A$. Así, $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[^x_a]$ para cada $a \in A$. Concluimos en ambos casos que $\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \vee \psi)$. Esto muestra que

$\forall x\varphi \vee \psi$ y $\forall x(\varphi \vee \psi)$ son verdaderas en las mismas estructuras, y, por tanto, lógicamente equivalentes. La justificación de (2) es parecida. □

Principio de sustitución de fórmulas equivalentes

El principio de sustitución de fórmulas equivalentes, que es análogo al de la lógica proposicional, dice lo siguiente:

> *Si en una fórmula sustituimos una subfórmula por una fórmula equivalente a ella obtenemos una fórmula equivalente a la fórmula inicial.*

El principio de sustitución de fórmulas equivalentes junto con la transitividad de la equivalencia lógica nos permite obtener nuevas equivalencias. Veamos un ejemplo. Si φ y ψ son fórmulas cualesquiera,

$$\exists x(\varphi \to \psi) \equiv \forall x\varphi \to \exists x\psi,$$

como se ve mediante la siguiente cadena de equivalencias.

$$\begin{array}{rcll}
\exists x(\varphi \to \psi) & \equiv & \exists x(\neg\varphi \vee \psi) & \text{pues } \alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta, \\
\exists x(\neg\varphi \vee \psi) & \equiv & \exists x\neg\varphi \vee \exists x\psi & \text{por (2) de la proposición 14.6,} \\
\exists x\neg\varphi \vee \exists x\psi & \equiv & \neg\exists x\neg\varphi \to \exists x\psi & \text{pues } \alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta, \\
\neg\exists x\neg\varphi \to \exists x\psi & \equiv & \forall x\varphi \to \exists x\psi & \text{pues } \neg\exists x\neg\varphi \equiv \forall x\varphi.
\end{array}$$

Puesto que la relación de equivalencia lógica es transitiva, obtenemos lo deseado.

La siguiente proposición se obtiene encadenando equivalencias, haciendo uso del principio de sustitución y los principios anteriores, como en el último ejemplo.

Proposición 14.10. *Si φ y ψ son fórmulas y la variable x no aparece libre en ψ,*

(1) $\forall x(\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \forall x\varphi$,
(2) $\exists x(\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \exists x\varphi$,
(3) $\forall x(\varphi \to \psi) \equiv \exists x\varphi \to \psi$,
(4) $\exists x(\varphi \to \psi) \equiv \forall x\varphi \to \psi$.

Compárese (1) con (3) y (2) con (4).

Proposición 14.11. *Si φ es una fórmula con a lo sumo la variable libre x, y c es una constante,*

(1) $\varphi\binom{x}{c} \equiv \exists x(x \approx c \wedge \varphi)$,
(2) $\varphi\binom{x}{c} \equiv \forall x(x \approx c \to \varphi)$.

Demostración. Justificaremos (1) dejando la justificación de (2) como ejercicio. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una estructura que satisface $\varphi\binom{x}{c}$. Sea $a = c^{\mathcal{A}}$. Por el lema de sustitución, $\mathcal{A} \models \varphi[^x_a]$, de modo que $\mathcal{A} \models (x \approx c \wedge \varphi)[^x_a]$ y, por tanto, $\mathcal{A} \models \exists x(x \approx c \wedge \varphi)$. Supongamos ahora que $\mathcal{A} \models \exists x(x \approx c \wedge \varphi)$. Así, existe $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models (x \approx c \wedge \varphi)[^x_a]$, de modo que $\mathcal{A} \models x \approx c[^x_a]$, es decir, $a = c^{\mathcal{A}}$. Además, $\mathcal{A} \models \varphi[^x_a]$, con lo cual, por el lema de sustitución, $\mathcal{A} \models \varphi\binom{x}{c}$. □

La última proposición tiene la siguiente consecuencia: toda sentencia es equivalente a una sentencia en la que las constantes individuales sólo aparecen en las ecuaciones.

Fórmulas prenexas

Una **fórmula prenexa** es una fórmula de la forma

$$Q_1x_1, \dots, Q_nx_n\alpha$$

donde $Q_1, \dots, Q_n$ son cuantificadores ($\exists$ o $\forall$) y α es una fórmula sin cuantificadores. La fórmula α es la **matriz** de la fórmula prenexa y $Q_1x_1, \dots, Q_nx_n$ es el **prefijo**. Por ejemplo, la fórmula

$$\forall x\forall y\exists z(Py \to (Rxy \wedge Syz))$$

es prenexa, pero la fórmula equivalente

$$\forall x(\exists yPy \to \exists z(Rxy \wedge Syz))$$

no lo es.

Proposición 14.12. *Toda fórmula es equivalente a una fórmula prenexa.*

Aunque no sea propiamente una demostración, vamos a describir un procedimiento para transformar cada fórmula en una fórmula prenexa equivalente. Dada una fórmula, lo primero que haremos es transformarla en otra equivalente en la que no haya dos bloques cuantificacionales con la misma variable, y en la que ninguna variable que aparece libre aparezca también ligada. Esto podemos hacerlo gracias a la proposición 14.5, ya que tenemos infinitas variables. Usaremos siempre variables nuevas, es decir que no aparezcan en la fórmula. Después, utilizando las equivalencias anteriores y las de lógica proposicional, iremos trasladando los cuantificadores al inicio de la fórmula.

EJEMPLOS

1. $\forall x Px \to \forall x Qx$.

   Primero reemplazamos la variable x en $\forall x Qx$ por la variable y, obteniendo
   $$\forall x Px \to \forall y Qy.$$
   Ahora trasladamos uno a uno los bloques cuantificacionales al inicio de la fórmula. Podemos empezar por cualquiera de los dos. Empecemos por el segundo. Por (1) de la proposición 14.10 obtenemos
   $$\forall y(\forall x Px \to Qy).$$
   A continuación trasladamos el bloque cuantificacional $\forall x$ al inicio de la fórmula $(\forall x Px \to Qy)$, aplicando (4) de la proposición 14.10. El resultado final es
   $$\forall y \exists x(Px \to Qy).$$
   Podemos hacer los traslados de bloques cuantificacionales en el otro orden posible, primero trasladando $\forall x$ y después $\forall y$. Si lo hacemos así obtenemos
   $$\exists x \forall y(Px \to Qy).$$
2. $\forall x(Px \to \exists y(Rxy \wedge \forall z Sxz))$.

   En este caso todos los bloques cuantificacionales tienen variables distintas y no hay variables libres. Podemos, pues, pasar a trasladar los bloques cuantificacionales al inicio de la fórmula; por ejemplo del siguiente modo:
   $$\forall x(Px \to \exists y \forall z(Rxy \wedge Sxz)),$$
   $$\forall x \exists y(Px \to \forall z(Rxy \wedge Sxz)),$$
   $$\forall x \exists y \forall z(Px \to (Rxy \wedge Sxz)).$$
3. $\exists x Px \to \forall z(Rzx \vee \exists z Sxz)$.

   Cambiaremos las variables cuantificadas para tener una fórmula equivalente en la que no existan bloques cuantificacionales distintos con la misma variable y en la que ninguna variable esté libre y ligada. Para ello reemplazamos $\exists x Px$ por $\exists u Pu$ y $\exists z Sxz$ por $\exists y Sxy$, obteniendo
   $$\exists u Pu \to \forall z(Rzx \vee \exists y Sxy).$$
   Ahora trasladamos los bloques cuantificacionales al inicio de la fórmula, de modo parecido a como hemos hecho en los ejemplos anteriores:
   $$\forall u(Pu \to \forall z(Rzx \vee \exists y Sxy)),$$
   $$\forall u \forall z(Pu \to (Rzx \vee \exists y Sxy)),$$
   $$\forall u \forall z(Pu \to \exists y(Rzx \vee Sxy)),$$
   $$\forall u \forall z \exists y(Pu \to (Rzx \vee Sxy)).$$

4. $\neg\exists x \forall y(Rxy \to \forall z Rzz)$.

   Una secuencia posible de transformaciones es la siguiente:
   $$\neg\exists x \forall y(Rxy \to \forall z Rzz),$$
   $$\forall x \neg\forall y(Rxy \to \forall z Rzz),$$
   $$\forall x \exists y \neg(Rxy \to \forall z Rzz),$$
   $$\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg\forall z Rzz),$$
   $$\forall x \exists y(Rxy \wedge \exists z \neg Rzz),$$
   $$\forall x \exists y \exists z(Rxy \wedge \neg Rzz).$$

3. Consecuencia lógica

Decimos que un conjunto Γ de sentencias de un lenguaje de primer orden L es **satisfacible** si existe una estructura $\mathcal{A}$ en la que son verdaderas todas las sentencias de Γ. En tal caso decimos que $\mathcal{A}$ **satisface** Γ, o que es un **modelo** de Γ, y escribimos
$$\mathcal{A} \models \Gamma.$$

Un conjunto de sentencias Γ es **insatisfacible** si no es satisfacible, es decir, si en toda estuctura al menos una sentencia de Γ es falsa.

EJEMPLOS

1. El conjunto formado por las sentencias
   $$\forall x(Px \vee Qx),\ \exists x(Px \wedge \neg Qx),\ \forall x(Px \to \exists y(Rxy \wedge Qy))$$
   es satisfacible, ya que por ejemplo es satisfecho por la estructura $\mathcal{A}$ cuyo universo es $\{1,2,3\}$ y donde $P^{\mathcal{A}} = \{1\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{2,3\}$ y $R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2\rangle\}$.
2. El conjunto formado por las sentencias
   $$\exists x(Px \wedge Qx),\ \forall x(Px \to Rxx),\ \forall x(Qx \to \neg Rxx)$$
   es insatisfacible, puesto que si hubiese una estructura $\mathcal{A}$ en la que fuesen verdaderas todas las sentencias del conjunto, debería existir un objeto en el dominio de la misma que perteneciera tanto a $P^{\mathcal{A}}$ como a $Q^{\mathcal{A}}$. Por pertenecer a $P^{\mathcal{A}}$, tal objeto debería estar relacionado consigo mismo por $R^{\mathcal{A}}$, pero por pertenecer a $Q^{\mathcal{A}}$, no puede estarlo.

Decimos que una sentencia σ es **consecuencia** de un conjunto de sentencias Γ, en símbolos, $\Gamma \models \sigma$, si σ es verdadera en toda estructura que satisface Γ. Así, σ no es consecuencia de Γ, en símbolos, $\Gamma \not\models \sigma$, si y sólo si hay una estructura que es un modelo de Γ pero no lo es de σ. Como en lógica proposicional abreviaremos «$\{\sigma\} \models \delta$» como «$\sigma \models \delta$» y «$\emptyset \models \sigma$» como «$\models \sigma$».

EJEMPLOS

1. $\{\forall x(Px \vee Qx), \forall x(Px \to \exists yRxy)\} \models \forall x(\neg Qx \to \exists yRxy)$.

   La razón es la siguiente: en cualquier estructura $\mathcal{A}$ que satisface el conjunto de sentencias $\{\forall x(Px \vee Qx), \forall x(Px \to \exists yRxy)\}$, si un objeto de su dominio no pertenece a la interpretación de Q, debe pertenecer a la de P, puesto que la sentencia $\forall x(Px \vee Qx)$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Pero puesto que la sentencia $\forall x(Px \to \exists yRxy)$ también es verdadera en $\mathcal{A}$, cada objeto del dominio de $\mathcal{A}$ que no pertenezca a la interpretación de Q debe satisfacer la fórmula $\exists yRxy$, con lo que la sentencia $\forall x(\neg Qx \to \exists yRxy)$ resulta verdadera en $\mathcal{A}$.

2. $\{\exists x(Px \vee Qx), \forall x(Px \to Rxx), \forall x(Qx \to \neg Rxx)\} \not\models \exists xRxx$.

   Por ejemplo, la estructura $\mathcal{A}$ cuyo dominio es $\{1,2,3\}$ y donde $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$, $Q^{\mathcal{A}} = A$ y $R^{\mathcal{A}} = \emptyset$, satisface el conjunto de sentencias $\{\exists x(Px \vee Qx), \forall x(Px \to Rxx), \forall x(Qx \to \neg Rxx)\}$ pero en ella es falsa $\exists xRxx$.

Los principios básicos de la relación de consecuencia de la lógica proposicional valen también para la relación de consecuencia entre conjuntos de sentencias y sentencias de primer orden, teniendo en cuenta que donde allí se habla de tautologías aquí debe hablarse de sentencias lógicamente válidas. Las justificaciones de todos ellos para el caso de la lógica de primer orden son análogas a las dadas para la lógica proposicional, con la salvedad de que ahora el papel que allí desempeñaban las asignaciones de valores de verdad lo desempeñan aquí las estructuras. Veamos algunos.

TEOREMA 14.13. (DE DEDUCCIÓN) *Sea Γ un conjunto de sentencias y sean σ y δ sentencias cualesquiera;*

$$\textit{si } \Gamma \cup \{\sigma\} \models \delta, \textit{ entonces } \Gamma \models (\sigma \to \delta).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\Gamma \cup \{\sigma\} \models \delta$ y veamos que $\Gamma \models (\sigma \to \delta)$. Debemos ver que la sentencia $(\sigma \to \delta)$ es verdadera en toda estructura que satisface Γ. Supongamos pues que $\mathcal{A} \models \Gamma$. Si σ es falsa en $\mathcal{A}$, $(\sigma \to \delta)$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Si σ es verdadera en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ satisface $\Gamma \cup \{\sigma\}$ y por tanto, puesto que $\Gamma \cup \{\sigma\} \models \delta$, δ será verdadera en $\mathcal{A}$, con lo que también lo es la sentencia $(\sigma \to \delta)$, como queríamos demostrar. □

PROPOSICIÓN 14.14. *Si Γ es un conjunto de sentencias y σ es una sentencia,*

$$\Gamma \models \sigma \quad \textit{sii} \quad \Gamma \cup \{\neg\sigma\} \textit{ es insatisfacible.}$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que 1) $\Gamma \models \sigma$ si y sólo si no hay ninguna estructura $\mathcal{A}$ que satisface Γ y no es modelo de σ y 2) $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ es insatisfacible si y sólo si no hay ninguna estructura $\mathcal{A}$ que satisface Γ y en la que σ es falsa. □

A continuación presentamos algunos principios específicos de la lógica de primer orden.

PROPOSICIÓN 14.15. *Si Γ es un conjunto de sentencias, α es una fórmula con a lo sumo una variable libre x y c es una constante,*

(1) *si $\Gamma \models \alpha\binom{x}{c}$, entonces $\Gamma \models \exists x\alpha$,*

(2) *si $\Gamma \models \forall x\alpha$, entonces $\Gamma \models \alpha\binom{x}{c}$,*

(3) *si $\Gamma \models \exists x\alpha$, $\Gamma \cup \{\alpha\binom{x}{c}\} \models \sigma$ y c no aparece en Γ ni en σ ni en α, entonces $\Gamma \models \sigma$.*

(4) *si $\Gamma \models \alpha\binom{x}{c}$ y c no aparece en Γ ni en α, entonces $\Gamma \models \forall x\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Supongamos que $\Gamma \models \alpha\binom{x}{c}$ y veamos que $\Gamma \models \exists x\alpha$. Sea $\mathcal{A}$ una estructura que satisface Γ. Entonces $\mathcal{A} \models \alpha\binom{x}{c}$. Por el lema de sustitución, $\mathcal{A} \models \alpha[c^{\mathcal{A}}]$, de modo que $\mathcal{A} \models \exists x\alpha$.

(2) Supongamos que $\Gamma \models \forall x\alpha$ y que $\mathcal{A} \models \Gamma$. Así, para cada $a \in A$, $\mathcal{A} \models \alpha[a]$. En particular, $\mathcal{A} \models \alpha[c^{\mathcal{A}}]$. Por tanto, por el lema de sustitución tenemos que $\mathcal{A} \models \alpha\binom{x}{c}$.

(3) Supongamos que $\Gamma \cup \{\alpha\binom{x}{c}\} \models \sigma$, donde c no aparece ni en Γ ni en σ, y que $\Gamma \models \exists x\alpha$. Con el propósito de demostrar que $\Gamma \models \sigma$, suponemos que $\mathcal{A} \models \Gamma$. Así, $\mathcal{A} \models \exists x\alpha$. Sea pues $b \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \alpha[b]$. Consideremos una nueva estructura $\mathcal{A}'$ que es en todo igual a $\mathcal{A}$ excepto en que ahora $c^{\mathcal{A}'} = b$. Puesto que c no aparece ni en Γ ni en α, por el lema de coincidencia, tenemos que $\mathcal{A}' \models \Gamma$ y $\mathcal{A}' \models \alpha[b]$. Pero como $c^{\mathcal{A}'} = b$, por el lema de sustitución, $\mathcal{A}' \models \alpha\binom{x}{c}$. Por tanto, $\mathcal{A}' \models \sigma$. Puesto que c no aparece en σ, de nuevo por el lema de coincidencia, obtenemos que $\mathcal{A} \models \sigma$.

(4) Supongamos que $\mathcal{A} \models \alpha\binom{x}{c}$, que la constante c no aparece en las sentencias de Γ y que $\mathcal{A} \models \Gamma$. Debemos ver que $\mathcal{A} \models \forall x\alpha$. Sea pues a un elemento arbitrario de A. Consideremos la estructura $\mathcal{A}'$ que en todo es igual a la estructura $\mathcal{A}$ excepto en que ahora $c^{\mathcal{A}'} = a$. Puesto que c no aparece en Γ y $\mathcal{A} \models \Gamma$, por el lema de coincidencia tenemos que $\mathcal{A}' \models \Gamma$. Por tanto, $\mathcal{A}' \models \alpha\binom{x}{c}$. Así, por el lema de sustitución, tenemos que $\mathcal{A}' \models \alpha[c^{\mathcal{A}}]$. Y puesto que $c^{\mathcal{A}} = a$ tenemos que $\mathcal{A}' \models \alpha[a]$. Ahora bien, como c no aparece en α, por el lema de coincidencia obtenemos que $\mathcal{A} \models \alpha[a]$. Por tanto, concluimos que $\mathcal{A} \models \forall x\alpha$. □

PROPOSICIÓN 14.16. *Si φ es una fórmula con a lo sumo la variable x libre, y c, d y e son constantes,*

(1) $c \approx d \models d \approx c$,

(2) $\{c \approx d, d \approx e\} \models c \approx e$,

(3) $\{\varphi(^x_c), c \approx d\} \models \varphi(^x_d)$.

DEMOSTRACIÓN. Las justificaciones de (1) y de (2) son inmediatas. Para justificar (3) supongamos que $\mathcal{A}$ es una estructura en la que $\varphi(^x_c)$ y $c \approx d$ son verdaderas. Entonces $c^{\mathcal{A}} = d^{\mathcal{A}}$. Por el lema de sustitución tenemos que $\mathcal{A} \models \varphi[c^{\mathcal{A}}]$. Por tanto, $\mathcal{A} \models \varphi[d^{\mathcal{A}}]$. Aplicando de nuevo el lema de sustitución obtenemos que $\mathcal{A} \models \varphi(^x_d)$. □

4. Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes sentencias son verdades lógicas? Si no lo son, exhiba una estructura en la que sean falsas. Si lo son, muestre que no puede existir una estructura en la que sean falsas.

(1) $\forall x(Px \to (Qx \to Px))$,
(2) $\forall x(Px \lor \neg Px)$,
(3) $\forall xPx \to \exists x(Px \lor Qx)$,
(4) $\forall xPx \to \forall x(Px \lor Qx)$,
(5) $\exists xPx \to \exists x(Px \land Qx)$,
(6) $\exists xPx \to \exists x(Px \lor Qx)$,
(7) $\forall x\exists yRxy \to \exists y\forall xRxy$,
(8) $\exists y\forall xRxy \to \forall x\exists yRxy$,
(9) $\exists x\neg(Px \land \neg Px)$,
(10) $(Pc \land Qc) \to \exists xPx$,
(11) $(Pc \land Qc) \to \exists x(Qx \lor \neg Px)$,
(12) $(Pc \lor Qc) \to \exists xQx$,
(13) $(Pc \lor Qc) \to \exists x(Px \lor Qx)$,
(14) $Pc \to \forall xPx$.

2. Muestre que los siguientes pares de fórmulas lo son de fórmulas equivalentes.

(1) $\forall x(\neg Px \land Qx)$, $\neg\exists x(Px \lor \neg Qx)$,
(2) $\exists x(Px \land Rxy)$, $\neg\forall x(Px \to \neg Rxy)$,
(3) $\neg\forall x(Px \to Qx)$, $\exists x(Px \land \neg Qx)$,
(4) $\neg\forall x\exists yRxy$, $\exists x\forall y\neg Rxy$,
(5) $\neg\exists x\forall yRxy$, $\forall x\exists y\neg Rxy$,
(6) $\forall x(\neg Px \to Qx)$, $\neg\exists x(\neg Px \land \neg Qx)$,
(7) $\forall x\exists y(Px \to Rxy)$, $\neg\exists x\forall y(Px \land \neg Rxy)$,
(8) $\forall x\neg\exists y(Px \to Rxy)$, $\forall x\forall y(Px \land \neg Rxy)$.

3. Muestre que los siguientes pares de sentencias lo son de sentencias no equivalentes. Debe darse, en cada caso, una estructura en la que una de las dos sentencias sea verdadera y la otra falsa.

(1) $\forall x(\neg Px \lor Qx)$, $\neg\exists xPx \lor \forall xQx$,
(2) $\exists x(\neg Px \land \neg Qx)$, $\neg\forall xPx \land \exists x\neg Qx$,

(3) $\exists x(Px \to Qx)$, $\exists xPx \to \forall xQx$,
(4) $\forall x(Px \to Qc)$, $\forall xPx \to Qc$,
(5) $\exists x(Px \to Qc)$, $\exists xPx \to Qc$.

4. Obtenga para cada una de las fórmulas siguientes una fórmula equivalente en forma prenexa.

(1) $\forall xPx \to \exists yQy$,
(2) $\forall xPx \to \exists xRxc$,
(3) $\forall x(Px \to \exists xRxy)$,
(4) $\exists x(Px \land \forall yRxy)$,
(5) $\forall x(Px \lor \forall yRxy)$,
(6) $\exists xPx \to \exists yQy$,
(7) $\exists xPx \to \forall yQy$,
(8) $\exists xPx \to \exists zRxz$,
(9) $\forall x((Px \land \forall yRxy) \to \exists zSxz))$,
(10) $\forall x((Px \lor \exists yRxy) \to \forall zSxz))$,
(11) $\forall x(\exists yRxy \lor \exists yRyx) \to \exists zSxz$,
(12) $\forall x(Px \to \forall yRxy) \to \exists zSxz$.

5. Averigüe cuáles de las sentencias siguientes son equivalentes entre sí. Justifique la respuesta.

(1) $\forall xRxc \to Pc$,
(2) $\exists xRxc \to Pc$,
(3) $\forall x(Rxc \to Pc)$,
(4) $\exists x(Rxc \to Pc)$.

6. Averigüe cuáles de las sentencias siguientes son equivalentes entre sí. Justifique la respuesta.

(1) $Pc \to \forall xRxc$,
(2) $Pc \to \exists xRxc$,
(3) $\forall x(Pc \to Rxc)$,
(4) $\exists x(Pc \to Rxc)$.

7. Justifique cada una de las siguientes afirmaciones encontrando una estructura que satisfaga las premisas pero no la conclusión.

(1) $\{\forall x(\neg Qx \to \neg Px), \forall x(Qx \to \neg Lx)\} \not\models \forall x(Px \to Lx)$,
(2) $\{\forall x(Px \to \exists yRxy), \forall x(\exists yRxy \to \exists yRyx)\} \not\models \forall x(\exists yRyx \to Px)$,
(3) $\{\forall x(Px \to (Qx \lor Lx)), \forall x(Qx \to Tx), \forall x(Lx \to Tx)\} \not\models \forall x(Lx \to Px)$,
(4) $\{\forall xyz((Rxy \land Ryz) \to Rxz), \forall xy(Rxy \to Ryx)\} \not\models \forall xRxx$,
(5) $\{\forall xyz((Rxy \land Ryz) \to Rxz)\} \not\models \forall xy(Rxy \to Ryx)$,
(6) $\{\exists xy(Rxy \land Ryx \land x \approx y)\} \not\models \forall xy((Rxy \land Ryx) \to x \approx y)$.

8. Sea φ una fórmula con a lo sumo la variable x libre y sea c una constante. Muestre que si $\forall x\varphi$ es una verdad lógica, entonces $\varphi(^x_c)$ también lo es.

9. Determine de cada una de las dos sentencias siguientes si es satisfacible o no. Si lo es, dé un modelo; si no lo es, demuestre que es falsa en toda estructura.

(1) $\forall x \exists y(Rxy \leftrightarrow \neg Ryy)$,
(2) $\exists x \forall y(Rxy \leftrightarrow \neg Ryy)$.

10. Muestre que el conjunto de las siguientes fórmulas es satisfacible:

$$\forall x \neg Rxx, \quad \forall x \exists y Rxy, \quad \forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)).$$

11. Sea $\Sigma = \{\forall x \exists y Rxy, \forall xy(Rxy \rightarrow \neg Rxy)\}$. Justifique que Σ no tiene modelos de 1 o 2 elementos. Para cada $n \geq 3$, halle un modelo de Σ de n elementos.

12. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ en las que $R^{\mathcal{A}}$ es una relación de equivalencia.

13. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ tales que $R^{\mathcal{A}}$ es una relación de equivalencia que tiene exactamente tres clases de equivalencia.

14. Encuentre un modelo del siguiente conjunto de sentencias:

$$\forall x \neg Rxx, \quad \forall x \exists y Rxy, \quad \forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)).$$

15. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ en las que $R^{\mathcal{A}}$ es un orden parcial estricto no lineal de A.

16. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ tales que $R^{\mathcal{A}}$ es un orden lineal estricto en A.

17. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ en las que $R^{\mathcal{A}}$ es un orden estricto lineal y denso en A.

18. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ en las que $R^{\mathcal{A}}$ es un orden parcial estricto en A con al menos dos elementos maximales.

19. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ en las que $R^{\mathcal{A}}$ es un orden parcial estricto en A sin elementos minimales.

20. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ en las que $R^{\mathcal{A}}$ es una biyección entre A y A.

21. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un único símbolo relacional binario, R, tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ tales que $R^{\mathcal{A}}$ es una función de A sobre A que no es inyectiva.

22. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un símbolo relacional binario R y un símbolo de predicado P tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}} \rangle$ tales que $R^{\mathcal{A}}$ es una biyección entre $P^{\mathcal{A}}$ y $A - P^{\mathcal{A}}$.

23. Encuentre una sentencia o un conjunto finito de sentencias en el lenguaje con un símbolo relacional binario R tal que sus modelos sean todos estructuras infinitas.

24. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje puro de la identidad (el que no tiene símbolos propios) tal que sus modelos sean las estructuras infinitas.

25. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un símbolo relacional binario R y un símbolo de predicado P tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}} \rangle$ tales que $R^{\mathcal{A}}$ es un orden lineal reflexivo en $P^{\mathcal{A}}$ y $P^{\mathcal{A}}$ es infinito.

26. Encuentre un conjunto de sentencias en el lenguaje con un símbolo relacional binario R tal que sus modelos sean las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ en las que $R^{\mathcal{A}}$ es una relación de equivalencia en A con infinitas clases de equivalencia.

27. Demuestre que ninguna de las tres sentencias siguientes es consecuencia de las restantes.

(1) $\forall x \neg Rxx$,
(2) $\forall xy((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x \approx y)$,
(3) $\forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$.

28. Demuestre que la tercera sentencia es consecuencia de las dos primeras, pero que ninguna de las otras dos es consecuencia de las restantes.

(1) $\forall x Rxx$,
(2) $\forall xyz((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow Ryz)$,
(3) $\forall xy(Rxy \rightarrow Ryx)$.

29. Demuestre que cada una de las sentencias (1) y (2) es consecuencia de las restantes, pero que (3) no lo es.

(1) $\forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$,
(2) $\forall xyz((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow Ryz)$,
(3) $\forall xy(Rxy \rightarrow Ryx)$.

30. Demuestre (2) de la proposición 14.11.

31. Demuestre que si Γ es un conjunto satisfacible de sentencias, entonces para cada sentencia σ, $\Gamma \cup \{\sigma\}$ o $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ es satisfacible.

32. Demuestre que si $\Gamma \cup \{\alpha(^x_c)\}$ es un conjunto satisfacible de sentencias, entonces $\Gamma \cup \{\exists x\alpha\}$ también es satisfacible.

33. Demuestre que si $\Gamma \cup \{\neg\alpha(^x_c)\}$ es insatisfacible y c no aparece en Γ, entonces $\Gamma \models \forall x\alpha$.

34. Demuestre que si $\Gamma \cup \{\neg\forall x\alpha\}$ es insatisfacible, entonces $\Gamma \cup \{\neg\alpha(^x_c)\}$ también es insatisfacible.

CAPÍTULO 15

LÓGICA DE PRIMER ORDEN CON SÍMBOLOS FUNCIONALES

1. Introducción

Con los lenguajes de primer orden introducidos hasta el momento podemos hablar de propiedades, de relaciones y de objetos particulares. Ahora bien, en la práctica científica y en la práctica diaria a menudo hablamos de operaciones y funciones en un conjunto de objetos, como por ejemplo la suma, el producto, o la exponenciación de números naturales, o de la función que a cada persona le asigna el año de su nacimiento. En este capítulo ampliaremos los lenguajes de primer orden con una nueva categoría de símbolos propios, los símbolos funcionales. Servirán para hablar de operaciones.

Consideremos las expresiones

$$3+2,$$

el sucesor de 5,

el año en que nació Kant,

que nombran, por este orden, el número 5, el número 6 y el año 1724. En este sentido se comportan como un nombre propio. Expresiones de este tipo se simbolizan utilizando símbolos funcionales. Con su ayuda formamos términos más complejos que las variables y las constantes.

Los **símbolos funcionales**, al igual que los relacionales, pueden ser unarios, binarios, ternarios, etc. Un lenguaje de primer orden podrá tener o no símbolos funcionales entre sus símbolos propios, al igual que puede tener o no constantes, símbolos de predicado o símbolos relacionales. Utilizaremos las letras «f», «g» y «h», posiblemente con subíndices, como símbolos funcionales; las usaremos también para referirnos a símbolos funcionales cualesquiera.

Los conceptos sintácticos y semánticos para lenguajes de primer orden con símbolos funcionales se definen de modo análogo a los de los lenguajes de primer orden sin símbolos funcionales. Lo único que cambia son las definiciones de término y de estructura, que deben dar cabida a los símbolos funcionales y a su interpretación.

2. Sintaxis

Un **término** de un lenguaje de primer orden L es una expresión que se obtiene aplicando las siguientes reglas:

1. toda variable es un término de L,
2. toda constante de L es un término de L,
3. si f es un símbolo funcional n-ario de L y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L, la expresión $ft_1 \ldots t_n$ también es un término de L.

Así, el conjunto de los términos de L es el menor conjunto de expresiones de L que contiene todas las variables, todas las constantes de L y está cerrado con respecto a la regla 3. Por tanto vale el siguiente principio de inducción.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN PARA TÉRMINOS. *Si L es un lenguaje con símbolos funcionales y*

(1) *las variables tienen la propiedad $\mathcal{P}$,*

(2) *las constantes de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$,*

(3) *si f es un símbolo funcional n-ario de L y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L con la propiedad $\mathcal{P}$, $ft_1 \ldots t_n$ también tiene la propiedad $\mathcal{P}$,*

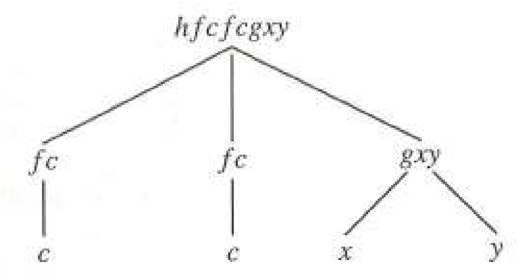
entonces todos los términos de L tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

EJEMPLO

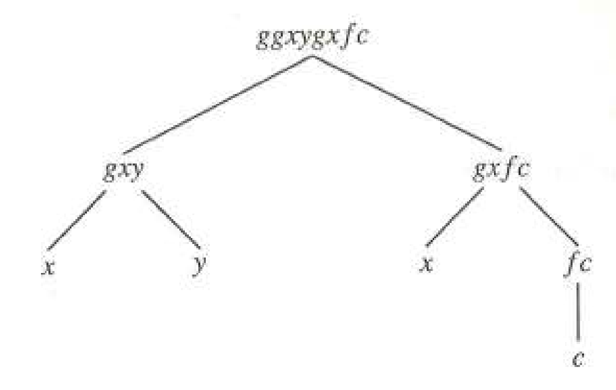
Si L es un lenguaje de primer orden con una constante c, un símbolo funcional unario f, uno binario g, y uno ternario h, las expresiones siguientes son términos de L:

$$c, \ fc, \ gxc, \ gfcx, \ hfcfcgxy, \ ffffc.$$

Un término, al igual que una fórmula, tiene su **árbol genealógico**, que indica cómo se obtiene a partir de los términos simples: las variables y las constantes. El árbol genealógico del término $hfcfcgxy$ es:



Y el del término $ggxygxfc$ es:



Un **término cerrado** es un término sin variables. Por ejemplo, c, fc, ffc, $gfcc$ son términos cerrados, pero fx, $fcfx$, $hgxfcgccfc$ no lo son.

Las **formulas atómicas** de un lenguaje de primer orden L con símbolos funcionales se definen como en el caso de los lenguajes de primer orden sin símbolos funcionales pero a partir de los términos de L; es decir, las fórmulas atómicas de L son las expresiones de la forma

$$t \approx t', \quad Pt, \quad Rt_1 \ldots t_n$$

donde $t, t', t_1, \ldots, t_n$ son términos de L, P es un símbolo de predicado y R es un símbolo relacional n-ario. Por ejemplo, para un lenguaje con un símbolo de predicado P, un símbolo relacional binario R, una constante c, un símbolo funcional unario f y uno binario g, las siguientes expresiones son fórmulas atómicas:

$$c \approx fc, \quad Pgxc, \quad Rxgfcx, \quad Rfxgfxfy.$$

La definición de **fórmula** para un lenguaje L con símbolos funcionales es idéntica a la dada para el caso de lenguajes sin símbolos funcionales. También lo son las definiciones de subfórmula, de aparición libre o ligada de una variable, de sentencia y fórmula abierta. Igualmente vale el principio de inducción para fórmulas.

Definimos la sustitución de una variable por un término en un término y la sustitución de una variable por un término en una fórmula así:

Si φ es una fórmula y t un término, la **sustitución** en φ de la variable x por t, en símbolos,

$$\varphi\binom{x}{t},$$

es la fórmula que se obtiene al reemplazar cada aparición libre de x en φ por t.

Si t y r son términos, la **sustitución** en t de la variable x por r, en símbolos,

$$t\binom{x}{r},$$

es el término que se obtiene reemplazando todas las apariciones de la variable x en t por el término r.

De modo análogo, definimos las sustituciones simultáneas $t\binom{x_1,\ldots,x_n}{t_1,\ldots,t_n}$ y $\varphi\binom{x_1,\ldots,x_n}{t_1,\ldots,t_n}$.

3. Semántica

Una **estructura** para un lenguaje de primer orden L con símbolos funcionales es un par

$$\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{F} \rangle,$$

donde

1. A es un conjunto no vacío,
2. $\mathcal{F}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios de L y tal que:

   2.1. si P es un símbolo de predicado de L, $\mathcal{F}(P)$ es un subconjunto de A,

   2.2. si R es un símbolo relacional n-ario de L, $\mathcal{F}(R)$ es una relación n-aria en A,

   2.3. si c es una constante de L, $\mathcal{F}(c)$ es un elemento de A,

   2.4. si f es un símbolo funcional n-ario de L, $\mathcal{F}(f)$ es una operación n-aria en A.

Si s es un símbolo propio de L, $\mathcal{F}(s)$ es la **intrepretación** de s en la estructura $\mathcal{A}$. Además, si $\mathcal{A}$ es una estructura para L, para cada símbolo s de L con

$$s^{\mathcal{A}}$$

nos referiremos a su interpretación en $\mathcal{A}$, es decir $s^{\mathcal{A}} = \mathcal{F}(s)$. Así, $f^{\mathcal{A}}$ es la interpretación del símbolo funcional f en la estructura $\mathcal{A}$.

Para definir el concepto de verdad para sentencias de un lenguaje L con símbolos funcionales en una estructura $\mathcal{A}$ ampliamos el lenguaje L al lenguaje $L(A)$ añadiendo constantes nuevas, una para cada elemento de A, y definimos en primer lugar la denotación de cada término cerrado de $L(A)$. La constante nueva correspondiente al elemento $a \in A$ es $\overline{a}$. También ampliamos la estructura $\mathcal{A}$ a una nueva estructura $\mathcal{A}^*$ con el mismo dominio que $\mathcal{A}$ y que interpreta los símbolos de L igual que $\mathcal{A}$ y que además interpreta $\overline{a}$ como a, es decir, $\overline{a}^{\mathcal{A}^*} = a$. Puesto que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ son esencialmente la misma estructura, nos referiremos a $\mathcal{A}^*$ tambien con «$\mathcal{A}$».

Denotación de los términos

Si $\mathcal{A}$ es una estructura para un lenguaje L con símbolos funcionales, la **denotación**, o **el valor**, en $\mathcal{A}$ de un término cerrado t del lenguaje ampliado $L(A)$, en símbolos, $t^{\mathcal{A}}$, se define como sigue:

1. Si c es una constante y $t = c$, $t^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}}$. En particular, si $a \in A$, $\overline{a}^{\mathcal{A}} = a$.
2. Si $t = f_1 \ldots t_n$, donde f es un símbolo funcional n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos cerrados, $t^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}})$.

Claramente, la denotación en $\mathcal{A}$ de todo término cerrado es un elemento de A.

Ejemplo

Sea L el lenguaje con un símbolo de predicado P, un símbolo relacional binario R, una constante c, un símbolo funcional unario f y dos símbolos funcionales binarios g y h. Consideremos la estructura

$$\mathcal{B} = \langle B, P^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, g^{\mathcal{B}}, h^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}} \rangle$$

para L donde:

B es el conjunto de los números naturales,

$P^{\mathcal{B}}$ es el conjunto de los números pares,

$R^{\mathcal{B}}$ es la relación ser menor que, es decir $R^{\mathcal{B}} = \{\langle n,m \rangle : n < n\}$,

$f^{\mathcal{B}}$ es la función sucesor, es decir, para cada n, $f^{\mathcal{B}}(n) = n+1$,

$g^{\mathcal{B}}$ es la operación suma, es decir, para cada n,m, $g^{\mathcal{B}}(n,m) = n+m$,

$h^{\mathcal{B}}$ es la operación producto, es decir, para cada n,m, $h^{\mathcal{B}}(n,m) = n \cdot m$,

$c^{\mathcal{B}} = 0$,

$d^{\mathcal{B}} = 2$.

Los términos de L, interpretados en la estructura $\mathcal{B}$, denotan elementos de B; por ejemplo:

1. La denotación del término fc es

   $$(fc)^{\mathcal{B}} = 0 + 1 = 1$$

   y la de ffc es

   $$(ffc)^{\mathcal{B}} = (0+1) + 1 = 2.$$

   Del mismo modo, $fffc$ denota el número 3, y $ffffc$ el número 4. Prosiguiendo de este modo nos damos cuenta de que todo número natural n es denotado por un término, a saber, $f \ldots fc$, donde $f \ldots f$ es una sucesión de n efes.

2. La denotación del término $gfcfd$ se obtiene como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}(gfcfd)^{\mathcal{B}} &= g^{\mathcal{B}}((fc)^{\mathcal{B}},(fd)^{\mathcal{B}})\\ &= g^{\mathcal{B}}(1,3)\\ &= 1+3\\ &= 4.\end{aligned}$$

3. La denotación del término $hffcfffd$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}(hffcfffd)^{\mathcal{B}} &= h^{\mathcal{B}}((ffc)^{\mathcal{B}},(fffd)^{\mathcal{B}})\\ &= h^{\mathcal{B}}(2,5)\\ &= 2\cdot 5\\ &= 10.\end{aligned}$$

Verdad en una estructura

La definición de verdad en una estructura es la misma que en el caso de los lenguajes sin símbolos funcionales, con la única excepción de las cláusulas para las fórmulas atómicas, que damos a continuación.

Sea $\mathcal{A}$ una estructura para un lenguaje de primer orden L con símbolos funcionales.

1. $\mathcal{A} \models t_1 \approx t_2$ sii $t_1^{\mathcal{A}} = t_2^{\mathcal{A}}$,
2. $\mathcal{A} \models Pt$ sii $t^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$,
3. $\mathcal{A} \models Rt_1 \ldots t_n$ sii $\langle t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}} \rangle \in R^{\mathcal{A}}$,

donde $t, t_1, \ldots, t_n$ son términos de $L(A)$, P es un símbolo de predicado de L y R es un símbolo relacional n-ario de L.

A partir de ahora seguiremos utilizando todas las convenciones notacionales introducidas en el capítulo 13.

Reformulamos los lemas de coincidencia y sustitución para adaptarlos a los lenguajes con símbolos funcionales.

Lema 15.1. (de coincidencia) *Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son estructuras para un lenguaje L con el mismo dominio, es decir, $A = B$.*

(1) *Si t es un término cerrado de L y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ interpretan del mismo modo los símbolos de L que aparecen en t, entonces $t^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{B}}$.*

(2) *Si φ es una fórmula de L cuyas variable libres están entre $x_1, \ldots, x_n$ y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ interpretan del mismo modo los símbolos que aparecen φ, entonces para cualesquiera objetos $a_1, \ldots, a_n \in A$,*

$$\mathcal{A} \models \varphi[^{x_1,\ldots,x_n}_{a_1,\ldots,a_n}] \quad \textit{sii} \quad \mathcal{B} \models \varphi[^{x_1,\ldots,x_n}_{a_1,\ldots,a_n}].$$

En particular, si σ es una sentencia y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ interpretan del mismo modo los símbolos que aparecen en ella,

$$\mathcal{A} \models \sigma \quad \textit{sii} \quad \mathcal{B} \models \sigma.$$

Dados un término t cuyas variables son a lo sumo x, una estructura $\mathcal{A}$ y un objeto a del dominio de $\mathcal{A}$, con «$t^{\mathcal{A}}[a]$» o con «$t^{\mathcal{A}}[^x_a]$», nos referiremos a la denotación del término $t\binom{x}{a}$ en $\mathcal{A}$, es decir,

$$t^{\mathcal{A}}[^x_a] = t^{\mathcal{A}}[a] = t\tbinom{x}{a}^{\mathcal{A}}.$$

Lema 15.2. (de sustitución) *Sea $\mathcal{A}$ una estructura para L.*

(1) *Si r es un término con a lo sumo una variable x y t es un término cerrado,*

$$r\tbinom{x}{t}^{\mathcal{A}} = r^{\mathcal{A}}[^x_{t^{\mathcal{A}}}].$$

(2) *Si φ es una fórmula con una única variable libre x y t es un término cerrado,*

$$\mathcal{A} \models \varphi\tbinom{x}{t} \quad \textit{sii} \quad \mathcal{A} \models \varphi[^x_{t^{\mathcal{A}}}].$$

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una estructura. Demostremos (1) y (2) para el lenguaje ampliado $L(A)$. Digamos que el *grado* de un término es el número de símbolos funcionales que aparecen en él.

(1) Sea t un término cerrado y sea $a = t^{\mathcal{A}}$. De acuerdo con el principio de inducción completa para números naturales (véase capítulo 5), para mostrar que para cada término r con a lo sumo una variable x,

$$r\tbinom{x}{t}^{\mathcal{A}} = r\tbinom{x}{a}^{\mathcal{A}}, \tag{15.1}$$

basta mostrar que (15.1) vale para un término r con a lo sumo una variable x si vale para todos los términos de grado menor que el de r con a lo sumo la variable x. Sea pues r un término de grado n con a lo sumo la variable x. Supongamos, como hipótesis inductiva, que (15.1) vale para cada término de grado menor que n con a lo sumo la variable x. Si $n = 0$, r es una constante o una variable. Si r es una constante, $r\binom{x}{t} = r = r\binom{x}{a}$. Por tanto, $r\binom{x}{t}^{\mathcal{A}} = r\binom{x}{a}^{\mathcal{A}}$. Si r es una variable, r es x. Por tanto,

$$r\tbinom{x}{t}^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{A}} = a = r\tbinom{x}{a}^{\mathcal{A}}.$$

Si $n \neq 0$, entonces $r = ft_1 \ldots t_k$ para algún símbolo funcional k-ario y términos $t_1, \ldots, t_k$, que tendrán necesariamente grado menor que n y contendrán a lo sumo la variable x. Por la hipótesis inductiva, para cada i tal que $1 \leq i \leq k$, $t_i\binom{x}{t}^{\mathcal{A}} = t_i\binom{x}{a}^{\mathcal{A}}$. Ahora bien, $(ft_1 \ldots t_k)\binom{x}{t} = ft_1\binom{x}{t} \ldots t_k\binom{x}{t}$; por tanto,

$$\begin{aligned}(ft_1\ldots t_k)\tbinom{x}{t}^{\mathcal{A}} &= f^{\mathcal{A}}(t_1\tbinom{x}{t}^{\mathcal{A}},\ldots,t_k\tbinom{x}{t}^{\mathcal{A}}),\\ &= f^{\mathcal{A}}(t_1\tbinom{x}{a}^{\mathcal{A}},\ldots,t_k\tbinom{x}{a}^{\mathcal{A}}),\\ &= (ft_1\tbinom{x}{a}\ldots t_k\tbinom{x}{a})^{\mathcal{A}},\\ &= (ft_1\ldots t_k)\tbinom{x}{a}^{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

(2) Sea t un término cerrado y sea $a=t^{\mathcal{A}}$. Demostremos que para cada fórmula φ con una única variable libre x,

$$\mathcal{A}\models\varphi\tbinom{x}{t} \quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models\varphi\tbinom{x}{a}. \tag{15.2}$$

De acuerdo con el principio de inducción completa para números naturales, basta demostrar que (15.2) vale para una fórmula φ con una única variable libre x si (15.2) también vale para toda fórmula con una única variable libre x y menor número de símbolos lógicos que φ. Sea pues φ una fórmula con n símbolos lógicos. Supongamos, como hipóteis inductiva, que (15.2) vale para toda fórmula con una única variable libre x y menos de n símbolos lógicos. Si $n=0$, φ debe ser atómica. Por tanto, es una ecuación o es de la forma $Rt_1\ldots t_k$ para algún símbolo relacional k-ario (posiblemente $k=1$, en cuyo caso R es un símbolo de predicado) y términos $t_1,\ldots,t_k$ con a lo sumo la variable x. En este segundo caso tenemos, aplicando al pasar de la línea 2 a la 3 el lema de sustitución ya demostrado para los términos, que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\models(Rt_1\ldots t_k)\tbinom{x}{t} &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models Rt_1\tbinom{x}{t}\ldots t_k\tbinom{x}{t},\\ &\quad \text{sii} \quad \langle t_1\tbinom{x}{t}^{\mathcal{A}}\ldots t_k\tbinom{x}{t}^{\mathcal{A}}\rangle\in R^{\mathcal{A}},\\ &\quad \text{sii} \quad \langle t_1\tbinom{x}{a}^{\mathcal{A}}\ldots t_k\tbinom{x}{a}^{\mathcal{A}}\rangle\in R^{\mathcal{A}},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models(Rt_1\ldots t_k)\tbinom{x}{a}.\end{aligned}$$

Para el caso de las ecuaciones se razona análogamente.

Si $n\neq 0$, φ es una fórmula con símbolos lógicos. Debemos razonar por casos. Si φ es la negación de una fórmula α, α tiene menos de n símbolos lógicos. Por la hipótesis inductiva,

$$\mathcal{A}\models\alpha\tbinom{x}{t} \quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models\alpha\tbinom{x}{a}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\models\neg\alpha\tbinom{x}{t} &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\not\models\alpha\tbinom{x}{t},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\not\models\alpha\tbinom{x}{a},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models\neg\alpha\tbinom{x}{a}.\end{aligned}$$

Si φ es la conjunción de dos fórmulas, α y β, entonces, puesto que el número de símbolos lógicos de α y el de β es menor que n, tenemos que por la hipótesis inductiva

$$\mathcal{A}\models\alpha\tbinom{x}{t} \text{ sii } \mathcal{A}\models\alpha\tbinom{x}{a} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}\models\beta\tbinom{x}{t} \text{ sii } \mathcal{A}\models\beta\tbinom{x}{a}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\models(\alpha\wedge\beta)\tbinom{x}{t} &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models\alpha\tbinom{x}{t}\wedge\beta\tbinom{x}{t},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models\alpha\tbinom{x}{t} \text{ y } \mathcal{A}\models\tbinom{x}{t},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models\alpha\tbinom{x}{a} \text{ y } \mathcal{A}\models\beta\tbinom{x}{a},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models\alpha\tbinom{x}{a}\wedge\beta\tbinom{x}{a},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models(\alpha\wedge\beta)\tbinom{x}{a}.\end{aligned}$$

Si φ es una disyunción, un condicional o un bicondicional se razona de modo parecido. Veamos, por último, el caso en que φ es de la forma $\exists y\psi$. El caso en que φ es de la forma $\forall y\psi$ se trata análogamente.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\models(\exists y\psi)\tbinom{x}{t} &\quad \text{sii} \quad \text{hay } b\in A \text{ tal que } \mathcal{A}\models\psi\tbinom{x}{t}\tbinom{y}{b},\\ &\quad \text{sii} \quad \text{hay } b\in A \text{ tal que } \mathcal{A}\models\psi\tbinom{y}{b}\tbinom{x}{t},\\ &\quad \text{sii} \quad \text{hay } b\in A \text{ tal que } \mathcal{A}\models\psi\tbinom{y}{b}\tbinom{x}{a},\\ &\quad \text{sii} \quad \text{hay } b\in A \text{ tal que } \mathcal{A}\models\psi\tbinom{x}{a}\tbinom{y}{b},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models\exists y\psi\tbinom{x}{a},\\ &\quad \text{sii} \quad \mathcal{A}\models(\exists y\psi)\tbinom{x}{a}.\end{aligned}$$

□

Los conceptos de conjunto y relación definible en una estructura al igual que los conceptos de verdad lógica, equivalencia lógica y consecuencia lógica se definen del mismo modo que para el caso de lenguajes sin símbolos funcionales. Las proposiciones 14.14 y 14.15 del capítulo 14 se transforman en las siguientes, cuyas demostraciones son análogas a las allí expuestas.

PROPOSICIÓN 15.3. *Si Γ es un conjunto de sentencias, α es una fórmula con a lo sumo una variable libre x, c es una constante y t es un término cerrado,*

(1) *si* $\Gamma\models\alpha\tbinom{x}{t}$, *entonces* $\Gamma\models\exists x\alpha$,

(2) *si* $\Gamma\models\forall x\alpha$, *entonces* $\Gamma\models\alpha\tbinom{x}{t}$.

(3) *si* $\Gamma\models\exists x\alpha$, $\Gamma\cup\{\alpha\tbinom{x}{c}\}\models\sigma$ *y c no aparece en Γ ni en σ ni en α, entonces* $\Gamma\models\sigma$.

(4) *si* $\Gamma\models\alpha\tbinom{x}{c}$ *y c no aparece en Γ ni en α, entonces* $\Gamma\models\forall x\alpha$.

PROPOSICIÓN 15.4. *Si φ es una fórmula con a lo sumo la variable x libre y t_1,t_2 y t_3 son términos cerrados,*

(1) $t_1\approx t_2\models t_2\approx t_1$,

(2) $\{t_1 \approx t_2, t_2 \approx t_3\} \models t_1 \approx t_3$,

(3) $\{\varphi(^x_{t_1}), t_1 \approx t_2\} \models \varphi(^x_{t_2})$.

4. Ejercicios

1. Demuestre, utilizando el principio de inducción para términos, que para cada término t, cada variable x y cada término r, $t(^x_r)$ es también un término.

2. Demuestre, utilizando el principio de inducción para fórmulas, que para cada fórmula φ, cada variable x y cada término t, $\varphi(^x_t)$ es también una fórmula.

3. Si el conjunto de las sentencias siguientes es satisfacible, dé un modelo; si no lo es justifíquelo.

$$\forall x \neg Rxx,\ \forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz),\ \forall xy(\neg x \approx y \rightarrow (Rxy \vee Ryx)),\ \forall xyRxfy,\ \forall x \neg Rxx.$$

4. Si el conjunto de las sentencias siguientes es satisfacible, dé un modelo; si no lo es justifíquelo.

$$\forall xRxx,\ \forall xy((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x \approx y),\ \forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz),$$
$$\forall xy(\neg x \approx y \rightarrow (Rxy \vee Ryx)),\ \ \forall xyz(Rxy \rightarrow Rfxzfxy),\ \forall xyz(Rxy \rightarrow Rfzxfzy).$$

5. Si el conjunto de las sentencias siguientes es satisfacible, dé un modelo; si no lo es justifíquelo.

$$\exists xfx \approx x,\ \exists x \neg fx \approx x,\ \forall xy(fx \approx fy \rightarrow x \approx y).$$

6. Si el conjunto de las sentencias siguientes es satisfacible, dé un modelo; si no lo es justifíquelo.

$$\forall x \neg fx \approx x,\ \forall xffx \approx x,\ \forall xy(fx \approx fy \rightarrow x \approx y).$$

7. Si el conjunto de las sentencias siguientes es satisfacible, dé un modelo; si no lo es justifíquelo.

$$\forall x \neg fx \approx x,\ \forall xffx \approx x,\ \exists x \forall y \neg fy \approx x.$$

8. Consideremos las sentencias

(1) $\forall xy(fx \approx fy \rightarrow x \approx y)$,

(2) $\forall x \exists y\, fy \approx x$.

¿Es alguna de ellas consecuencia de la otra? Justifique la respuesta.

9. Justifique que $\forall xyx \approx y$ no es consecuencia del conjunto cuyos elementos son las sentencias

$$\forall xy((\neg Px \wedge \neg Py) \rightarrow x \approx y),\ \forall x(Px \rightarrow \neg Pfx),\ \forall xy(\neg x \approx y \rightarrow \neg fx \approx fy).$$

10. Encuentre un conjunto de sentencias Σ en el lenguaje con un único símbolo funcional unario f tal que para toda estructura $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$,

$$\mathcal{A} \models \Sigma \quad \text{sii} \quad f^{\mathcal{A}} \text{ es una biyección entre } A \text{ y } A.$$

11. Encuentre un conjunto de sentencias Σ en el lenguaje con un único símbolo funcional unario f tal que para toda estructura $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$,

$$\mathcal{A} \models \Sigma \quad \text{sii} \quad f^{\mathcal{A}} \text{ es sobre } A \text{ pero no es inyectiva.}$$

¿Cómo son los modelos de Σ?

12. Encuentre un conjunto de sentencias Σ en el lenguaje con un símbolo relacional binario R y un símbolo de predicado P tal que para toda estructura $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$:

(1) Si $\mathcal{A} \models \Sigma$ y A es finito, A tiene un número par de elementos.

(2) Si n es un número par distinto de cero, Σ tiene un modelo cuyo universo tiene exactamente n elementos.

13. Considere el lenguaje con un único símbolo funcional unario f. Encuentre una sentencia satisfacible cuyos modelos sean todos infinitos.

14. Considere el lenguaje con un único símbolo funcional unario f y un símbolo de predicado P. Encuentre un conjunto de sentencias Σ tal que sus modelos son las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$ en las que la función $f^{\mathcal{A}}$ restringida a $P^{\mathcal{A}}$ (es decir, la función g cuyo dominio es $P^{\mathcal{A}}$ y tal que para cada $a \in P^{\mathcal{A}}$, $g(a) = f(a)$) es una biyección entre $P^{\mathcal{A}}$ y $A - P^{\mathcal{A}}$.

15. Considere el lenguaje con dos símbolos funcionales binarios, f y g, y la estructura $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$, donde A es el conjunto de los números naturales, $f^{\mathcal{A}}$ es la operación suma y $g^{\mathcal{A}}$ la operación producto. Para cada uno de los siguientes apartados encuentre una fórmula con la variable x libre cuyas soluciones sean las descritas:

(1) Los números mayores que cero.

(2) El número 0.

(3) El número 1.

(4) El número 2.

(5) Los números pares.

(6) Los números impares.

(7) Los números primos.

16. Considere el lenguaje con dos símbolos funcionales binarios, f y g, y la estructura $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$, donde A es el conjunto de los números naturales, $f^{\mathcal{A}}$ es la operación suma y $g^{\mathcal{A}}$ la operación producto. Para cada uno de los siguientes apartados encuentre una fórmula con dos variables libres, x, y, que defina la relación descrita:



(1) $\{\langle n,m\rangle : n \leq m\}$.
(2) $\{\langle n,m\rangle : n < m\}$.
(3) $\{\langle n,m\rangle : n$ divide a $m\}$.
(4) $\{\langle n,m\rangle : n = 3\cdot m\}$.

17. Considere el lenguaje con dos símbolos funcionales binarios, f y g, y dos constantes c y d. Considere también la estructura $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle$, donde A es el conjunto de los números naturales, $f^{\mathcal{A}}$ es la operación suma, $g^{\mathcal{A}}$ la operación producto, $c^{\mathcal{A}}$ es el número cero y $d^{\mathcal{A}}$ es el número 1. Simbolice cada uno de los siguientes enunciados.

(1) La suma de dos números positivos es mayor que cada uno de ellos.
(2) La suma de dos números pares es par.
(3) Si el producto de dos números es impar, también lo son los factores.
(4) Un número par es un número divisible por dos.
(5) Todo número es divisible por 1.
(6) Todo divisor de dos números es divisor de su suma.
(7) Cero es el único número x tal que $x+x=x$.
(8) Cero y 1 son los únicos números x tales que $x\cdot x = x$.
(9) El sucesor de un número impar es par.
(10) Todo número impar es sucesor de un número par.

18. Demuestre por inducción el lema de coincidencia.

Capítulo 16

CÁLCULO DEDUCTIVO

1. Introducción

Como sabemos, los argumentos son correctos o incorrectos. Estas propiedades son intrínsecas a los argumentos y las poseen independientemente de que lo sepamos. Para descubrir y justificar que un argumento correcto lo es usualmente se realizan demostraciones.

La definición del concepto de consecuencia lógica dada en el capítulo anterior es acorde con la idea de que la relación de consecuencia conserva la verdad, pero no nos ofrece ningún método para determinar si una sentencia es consecuencia de un conjunto de sentencias. De hecho, ni siquiera nos proporciona un método sistemático para extraer consecuencias de un conjunto dado de sentencias. Los cálculos deductivos, inspirados en la actividad de realizar demostraciones, permiten extraer de un modo efectivo las consecuencias de un conjunto finito cualquiera de sentencias mediante la construcción de derivaciones. Un cálculo consta de un conjunto finito de reglas de inferencia (o de un conjunto finito de axiomas y reglas de inferencia, según el tipo de cálculo), que permiten pasar de unas sentencias a consecuencias de las mismas, y de una serie de instrucciones que indican cómo obtener derivaciones.

Un cálculo deductivo debe ser correcto, es decir, únicamente debe permitir derivar consecuencias de los conjuntos de premisas a los que lo apliquemos. Además, para la lógica de primer orden es posible obtener cálculos completos, es decir, que permiten derivar todas las consecuencias de cualquier conjunto de premisas.

2. El cálculo deductivo

Hay muchos cálculos deductivos correctos y completos para la lógica de primer orden. Además, hay diversos estilos de cálculo deductivo, uno de los cuales es el de los cálculos de deducción natural que introdujo el lógico alemán Gerhard Gentzen en 1934. El cálculo que presentamos en este libro es de este tipo.

Fijemos un lenguaje de primer orden L y extendámoslo añadiéndole un conjunto infinito numerable de constantes nuevas, las *constantes auxiliares*. Un **secuente** de L es un par $\langle\Sigma,\alpha\rangle$, donde Σ es un conjunto finito de sentencias del lenguaje extendido y α es una sentencia de dicho lenguaje. Los elementos de Σ son **las premisas** del secuente y α es su **conclusión**. En la formulación de las reglas de deducción y en el curso de las derivaciones omitiremos los paréntesis angulares de los secuentes y dejaremos más espacio que el habitual entre el conjunto de premisas y la conclusión. Así, escribiremos «$\Sigma \quad \alpha$» en lugar de «$\langle\Sigma,\alpha\rangle$».

Una **derivación** (en el cálculo) es una sucesión finita de secuentes cada uno de los cuales se obtiene mediante la aplicación de alguna de las siguientes reglas de inferencia:

REGLAS ESTRUCTURALES

[E1] $\dfrac{}{\Sigma \quad \alpha}$, si $\alpha \in \Sigma$

[E2] $\dfrac{\Sigma \quad \alpha}{\Delta \quad \alpha}$, si $\Sigma \subseteq \Delta$

INTRODUCCIÓN Y ELIMINACIÓN DE LA NEGACIÓN

[I¬] $\dfrac{\begin{array}{ll}\Sigma\cup\{\alpha\} & \beta \\ \Sigma\cup\{\alpha\} & \neg\beta\end{array}}{\Sigma \quad \neg\alpha}$

[E¬] $\dfrac{\begin{array}{ll}\Sigma\cup\{\neg\alpha\} & \beta \\ \Sigma\cup\{\neg\alpha\} & \neg\beta\end{array}}{\Sigma \quad \alpha}$

INTRODUCCIÓN Y ELIMINACIÓN DE LA CONJUNCIÓN

[I∧] $\dfrac{\begin{array}{ll}\Sigma & \alpha \\ \Sigma & \beta\end{array}}{\Sigma \quad (\alpha\wedge\beta)}$

[E∧] $\dfrac{\Sigma \quad (\alpha\wedge\beta)}{\Sigma \quad \alpha}$ $\qquad$ $\dfrac{\Sigma \quad (\alpha\wedge\beta)}{\Sigma \quad \beta}$

INTRODUCCIÓN Y ELIMINACIÓN DE LA DISYUNCIÓN

[I∨] $\dfrac{\Sigma \quad \alpha}{\Sigma \quad (\alpha\vee\beta)}$ $\qquad$ $\dfrac{\Sigma \quad \beta}{\Sigma \quad (\alpha\vee\beta)}$

[E∨] $\dfrac{\begin{array}{ll}\Sigma & (\alpha\vee\beta) \\ \Sigma\cup\{\alpha\} & \gamma \\ \Sigma\cup\{\beta\} & \gamma\end{array}}{\Sigma \quad \gamma}$

INTRODUCCIÓN Y ELIMINACIÓN DEL CONDICIONAL

[I→] $\dfrac{\Sigma\cup\{\alpha\} \quad \beta}{\Sigma \quad \alpha\rightarrow\beta}$

[E→] $\dfrac{\begin{array}{ll}\Sigma & (\alpha\rightarrow\beta) \\ \Sigma & \alpha\end{array}}{\Sigma \quad \beta}$

INTRODUCCIÓN Y ELIMINACIÓN DEL BICONDICIONAL

[I↔] $\dfrac{\begin{array}{ll}\Sigma\cup\{\alpha\} & \beta \\ \Sigma\cup\{\beta\} & \alpha\end{array}}{\Sigma \quad (\alpha\leftrightarrow\beta)}$

[E↔] $\dfrac{\begin{array}{ll}\Sigma & (\alpha\leftrightarrow\beta) \\ \Sigma & \alpha\end{array}}{\Sigma \quad \beta}$ $\qquad$ $\dfrac{\begin{array}{ll}\Sigma & (\alpha\leftrightarrow\beta) \\ \Sigma & \beta\end{array}}{\Sigma \quad \alpha}$

INTRODUCCIÓN Y ELIMINACIÓN DEL CUANTIFICADOR UNIVERSAL

[I∀] $\dfrac{\Sigma \quad \varphi\binom{x}{c}}{\Sigma \quad \forall x\varphi}$, c es una constante que no aparece en $\Sigma\cup\{\varphi\}$

$$[E_\forall] \quad \frac{\Sigma \quad \forall x\varphi}{\Sigma \quad \varphi\binom{x}{t}}, \ t \text{ es un término cerrado}$$

INTRODUCCIÓN Y ELIMINACIÓN DEL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

$$[I_\exists] \quad \frac{\Sigma \quad \varphi\binom{x}{t}}{\Sigma \quad \exists x\varphi}, \ t \text{ es un término cerrado}$$

$$[E_\exists] \quad \frac{\begin{array}{cc}\Sigma & \exists x\varphi \\ \Sigma\cup\{\varphi\binom{x}{c}\} & \alpha\end{array}}{\Sigma \quad \alpha}, \ c \text{ no aparece en } \Sigma\cup\{\varphi,\alpha\}$$

REGLAS DE LA IGUALDAD: REFLEXIVIDAD Y SUSTITUCIÓN

$$[R_\approx] \quad \frac{}{\Sigma \quad t\approx t}, \ t \text{ es un término cerrado}$$

$$[S_\approx] \quad \frac{\begin{array}{cc}\Sigma & t\approx t' \\ \Sigma & \varphi\binom{x}{t}\end{array}}{\Sigma \quad \varphi\binom{x}{t'}}, \ t \text{ y } t' \text{ son términos cerrados}$$

Toda regla debe entenderse como una *instrucción* que permite obtener un secuente a partir de cierta colección de secuentes. Por ejemplo, la regla $[I_\vee]$ dice que a partir de un secuente $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ podemos obtener el secuente $\langle\Sigma,\alpha\vee\beta\rangle$, para cada fórmula β. Las reglas [E1] y $[R_\approx]$ son las únicas reglas que se aplican a una colección vacía de secuentes. La regla [E1] nos permite introducir el secuente $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ cuando $\alpha\in\Sigma$, y la regla $[R_\approx]$ nos permite introducir un secuente de la forma $\langle\Sigma,t\approx t\rangle$ siempre que lo creamos conveniente. Estas dos reglas son las que sirven, entre otras cosas, para empezar las derivaciones. Cada una de las reglas restantes consta de uno o más secuentes a los que se aplica (los *secuentes superiores*), y de un secuente que se obtiene al aplicarla (el *secuente inferior*).

Las dos reglas estructurales recogen dos principios básicos de la relación de consecuencia que no tienen que ver con ningún símbolo lógico (una conectiva, un cuantificador o el símbolo de igualdad) particular; la reflexividad ([E1]) y la monotonía ([E2]). Cada una de las demás reglas sirve para manipular un único símbolo lógico. Obsérvese que para cada uno de ellos tenemos reglas de introducción y reglas de eliminación.

Decimos que un secuente $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ es **derivable** (en el cálculo) si existe una derivación cuyo último secuente es $\langle\Sigma,\alpha\rangle$. Dada una derivación, diremos que es una derivación de su último secuente.

Si $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ es un conjunto finito de sentencias de L y α es una sentencia de L, decimos que α es **deducible** de $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ si el secuente $\langle\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\},\alpha\rangle$ es derivable. En general, dado un conjunto Γ de sentencias de L (posiblemente infinito) y una sentencia α de L, decimos que α es **deducible** de Γ, en símbolos, $\Gamma\vdash\alpha$, si α es deducible de un subconjunto finito de Γ, es decir, si hay un subconjunto finito Σ de Γ tal que el secuente $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ es derivable. Diremos que una sentencia α es **deducible sin premisas** si $\emptyset\vdash\alpha$. Abreviaremos «$\{\alpha\}\vdash\beta$» mediante «$\alpha\vdash\beta$» y «$\emptyset\vdash\alpha$» mediante «$\vdash\alpha$».

El concepto de derivación es puramente sintáctico: las reglas son reglas para la manipulación de entidades sintácticas, los secuentes. Ahora bien, el motivo por el cual se han elegido las reglas tiene que ver con la semántica. Decimos que un **secuente** $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ es **correcto** si α es consecuencia de Σ. Las reglas que hemos introducido son tales que si sus secuentes superiores son correctos, también lo es su secuente inferior. Por lo que respecta a las reglas sin secuentes superiores ([E1] y $[R_\approx]$), esto significa que sus secuentes inferiores son correctos. Puesto que respetan la corrección de los secuentes, decimos que las reglas son correctas. De la corrección de las reglas se sigue que todo secuente derivable es correcto.

CÓMO UTILIZAR LAS REGLAS

A continuación presentamos una serie de ejemplos comentados. El lector puede acudir a ellos cuando tenga dudas acerca del uso de una regla. Como hemos dicho, una derivación es una sucesión de secuentes obtenida de acuerdo con las reglas. Escribiremos las derivaciones verticalmente, de modo que:

1. cada línea contendrá un secuente,
2. las líneas estarán numeradas, y
3. al lado de cada secuente figurará el nombre de la regla que se ha utilizado para obtenerlo y los números de las líneas en que aparecen los secuentes a los que se ha aplicado la regla.

Si en una derivación tenemos un secuente $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ decimos que α se ha *deducido* de Σ o que α se ha *obtenido a partir* de Σ, o a partir de las sentencias en Σ.

Para obtener una derivación de un secuente $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ debe construirse una derivación cuyo último secuente sea $\langle\Sigma,\alpha\rangle$.

Las reglas [E1] y $[R_\approx]$ son las únicas que nos permiten comenzar las derivaciones. Las reglas que se aplican a más de un secuente tienen la peculiaridad de que el conjunto Σ que aparece en su descripción debe ser el mismo en todos los secuentes. Así, por ejemplo, no podemos aplicar $[I_\wedge]$ a dos secuentes $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ y $\langle\Delta,\beta\rangle$, con Σ distinto de Δ, para obtener $\langle\Sigma\cup\Delta,(\alpha\wedge\beta)\rangle$. Sin embargo, a partir de los secuentes $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ y $\langle\Delta,\beta\rangle$ podemos obtener primero, utilizando la regla

[E2], los secuentes $\langle \Sigma \cup \Delta, \alpha \rangle$ y $\langle \Sigma \cup \Delta, \beta \rangle$ y aplicar luego a ellos la regla $[I_\wedge]$ para obtener $\langle \Sigma \cup \Delta, (\alpha \wedge \beta) \rangle$. Al aplicar [E2] hemos uniformizado los conjuntos de premisas de los secuentes. En general, cuando en el curso de una derivación utilicemos la regla [E2] con el propósito de uniformizar los conjuntos de premisas de dos (o más) secuentes para poder aplicar una regla determinada a los resultados diremos que *uniformizamos las premisas de los secuentes.*

La regla $[I_\wedge]$

Para deducir una sentencia $(\alpha \wedge \beta)$ de un conjunto de sentencias Σ, podemos deducir α y β de Σ. Éste es el contenido de la regla $[I_\wedge]$. Por ejemplo, para deducir $(Pc \wedge Qc)$ de $\{Pc, Qc\}$, hacemos la siguiente derivación:

1.	$\{Pc, Qc\}$	Pc	[E1]
2.	$\{Pc, Qc\}$	Qc	[E1]
3.	$\{Pc, Qc\}$	$(Pc \wedge Qc)$	$[I_\wedge]$, 1, 2

La regla $[E_\wedge]$

Si tratamos de deducir α de Σ utilizando la regla $[E_\wedge]$ debemos deducir primero, para alguna sentencia β, $(\alpha \wedge \beta)$ de Σ o $(\beta \wedge \alpha)$ de Σ. Por ejemplo, para deducir Qc de $\Sigma = \{(Pc \wedge (Qc \wedge Tc))\}$ podemos hacer la derivación:

1.	Σ	$(Pc \wedge (Qc \wedge Tc))$	[E1]
2.	Σ	$(Qc \wedge Tc)$	$[E_\wedge]$, 1
3.	Σ	Qc	$[E_\wedge]$, 2

La regla $[I_\rightarrow]$

Esta regla corresponde a la estrategia usual para demostrar enunciados condicionales según la cual se supone el antecedente y se concluye el consecuente. Para deducir $(\alpha \rightarrow \beta)$ de Σ utilizando la regla $[I_\rightarrow]$ debe deducirse primero β de $\Sigma \cup \{\alpha\}$, es decir, con ayuda de las premisa en Σ y la premisa auxiliar α, debe obtenerse β. Así, deducimos $(Qc \rightarrow (Pc \wedge Qc))$ a partir de $\{Pc\}$ mediante la siguiente derivación.

1.	$\{Pc\}$	Pc	[E1]
2.	$\{Pc, Qc\}$	Qc	[E1]
3.	$\{Pc, Qc\}$	Pc	[E2], 1
4.	$\{Pc, Qc\}$	$(Pc \wedge Qc)$	$[I_\wedge]$, 3, 2
5.	$\{Pc\}$	$(Qc \rightarrow (Pc \wedge Qc))$	$[I_\rightarrow]$, 3

En la línea 3 de la derivación se han uniformizado premisas, para poder aplicar $[I_\wedge]$.

La regla $[I_\rightarrow]$ también permite deducir $(\alpha \rightarrow \beta)$ de Σ si previamente se ha deducido β de Σ utilizando la regla estructural [E2], como muestra la siguiente derivación:

1.	$\{Qc\}$	Qc	
2.	$\{Qc, Pc\}$	Qc	[E2], 1
3.	$\{Qc\}$	$(Pc \rightarrow Qc)$	$[I_\rightarrow]$, 2

La regla $[E_\rightarrow]$

Esta regla se conoce habitualmente con el nombre de Modus Ponens. Para deducir β de Σ con su ayuda basta deducir primero, para alguna sentencia α, tanto $(\alpha \rightarrow \beta)$ como α de Σ. Por ejemplo, puede deducirse Tc de $\Sigma = \{Pc, ((Pc \vee Qc) \rightarrow Tc)\}$ mediante la siguiente derivación:

1.	Σ	$((Pc \vee Qc) \rightarrow Tc)$	[E1]
2.	Σ	Pc	[E1]
3.	Σ	$(Pc \vee Qc)$	$[I_\vee]$, 2
4.	Σ	Tc	$[E_\rightarrow]$, 1, 3

La regla $[I_\vee]$

Para deducir $(\alpha \vee \beta)$ de Σ basta deducir α o deducir β de Σ y aplicar la regla $[I_\vee]$. Por ejemplo, puede deducirse $((Pc \wedge Qc) \vee Tc)$ de $\{Pc, Qc\}$ mediante la derivación:

1.	$\{Pc, Qc\}$	Pc	[E1]
2.	$\{Pc, Qc\}$	Qc	[E1]
3.	$\{Pc, Qc\}$	$(Pc \wedge Qc)$	$[I_\wedge]$, 1, 2
4.	$\{Pc, Qc\}$	$((Pc \wedge Qc) \vee Tc)$	$[I_\vee]$, 3

La regla $[E_\vee]$

Si hemos deducido $(\alpha \vee \beta)$ de Σ, para deducir δ de Σ utilizando la regla $[E_\vee]$ debemos deducir δ tanto de $\Sigma \cup \{\alpha\}$ como de $\Sigma \cup \{\alpha\}$. Por ejemplo, si

$$\Sigma = \{(Qc \vee Tc)), (Qc \rightarrow Lc), (Tc \rightarrow Lc), Pc\}$$

y queremos deducir Lc de Σ, podemos deducir primero Lc de $\Sigma \cup \{Qc\}$ y de

$\Sigma\cup\{Tc\}$, según se hace en la siguiente derivación:

1.	Σ	$(Qc \vee Tc)$	[E1]
2.	Σ	$(Qc \to Lc)$	[E1]
3.	Σ	$(Tc \to Lc)$	[E1]
4.	$\Sigma\cup\{Qc\}$	Qc	[E1]
5.	$\Sigma\cup\{Qc\}$	$(Qc \to Lc)$	[E2], 2
6.	$\Sigma\cup\{Qc\}$	Lc	[$E_{\to}$], 4, 5
7.	$\Sigma\cup\{Tc\}$	Tc	[E1]
8.	$\Sigma\cup\{Tc\}$	$(Tc \to Lc)$	[E2], 3
9.	$\Sigma\cup\{Tc\}$	Lc	[$E_{\to}$], 7, 8
10.	Σ	Lc	[$E_{\vee}$], 1, 6, 9

La regla [$E_{\vee}$] corresponde a la estrategia de demostración según la cual cuando se quiere demostrar un enunciado a partir de una disyunción se puede proceder demostrando el enunciado a partir de cada uno de los componentes de la disyunción.

La regla [$I_{\neg}$]

La regla [$I_{\neg}$] corresponde a la estrategia de demostración de una negación por reducción al absurdo: para demostrar la negación de un enunciado A, basta demostrar cualquier enunciado y su negación a partir de A. Así, para deducir $\neg\alpha$ de Σ podemos utilizar la regla [$I_{\neg}$] deduciendo primero alguna sentencia β y su negación, $\neg\beta$, de $\Sigma\cup\{\alpha\}$. Es decir, debemos obtener primero una sentencia y su negación a partir de Σ más la premisa auxiliar α. Por ejemplo, para deducir $\neg Pc$ de $\Sigma = \{(Pc \to Qc), \neg Qc\}$ utilizando la regla [$I_{\neg}$] podemos proceder así:

1.	Σ	$(Pc \to Qc)$	[E1]
2.	$\Sigma\cup\{Pc\}$	Pc	[E1]
3.	$\Sigma\cup\{Pc\}$	$(Pc \to Qc)$	[E2], 1
4.	$\Sigma\cup\{Pc\}$	Qc	[$E_{\to}$], 3, 2
5.	$\Sigma\cup\{Pc\}$	$\neg Qc$	[E1]
6.	Σ	$\neg Pc$	[$I_{\neg}$], 4, 5

La regla [$E_{\neg}$]

La regla [$E_{\neg}$] corresponde a la estrategia de demostración de un enunciado por reducción al absurdo: para demostrar un enunciado A basta con demostrar cualquier enunciado y su negación a partir de la negación de A. Así, si queremos deducir α de Σ podemos utilizar la regla [$E_{\neg}$] deduciendo primero alguna sentencia y su negación a partir de Σ más la premisa auxiliar $\neg\alpha$, es decir, a partir de $\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$. Por ejemplo, para deducir Pc de $\Sigma = \{(\neg Pc \to Qc), \neg Qc\}$ basta realizar la siguiente derivación:

1.	Σ	$(\neg Pc \to Qc)$	[E1]
2.	$\Sigma\cup\{\neg Pc\}$	$\neg Pc$	[E1]
3.	$\Sigma\cup\{\neg Pc\}$	$(\neg Pc \to Qc)$	[E2], 1
4.	$\Sigma\cup\{\neg Pc\}$	Qc	[$E_{\to}$], 1, 3
5.	$\Sigma\cup\{\neg Pc\}$	$\neg Qc$	[E1]
6.	Σ	Pc	[$I_{\neg}$], 4, 5

La regla [$I_{\leftrightarrow}$]

Si se trata de deducir un bicondicional $\alpha \leftrightarrow \beta$ de un conjunto Σ utilizando la regla [$I_{\leftrightarrow}$], debemos deducir primero α de $\Sigma\cup\{\beta\}$ y β de $\Sigma\cup\{\alpha\}$, tal como se ilustra en la siguiente derivación de la sentencia $(Pc \leftrightarrow Qc)$ a partir del conjunto $\Sigma = \{(Pc \to Qc), (Qc \to Pc)\}$.

1.	Σ	$(Pc \to Qc)$	[E1]
2.	$\Sigma\cup\{Pc\}$	Pc	[E1]
3.	$\Sigma\cup\{Pc\}$	$(Pc \to Qc)$	[E2], 1
4.	$\Sigma\cup\{Pc\}$	Qc	[$E_{\to}$] 3, 2
5.	Σ	$(Qc \to Pc)$	[E1]
6.	$\Sigma\cup\{Qc\}$	Qc	[E1]
7.	$\Sigma\cup\{Qc\}$	$(Qc \to Pc)$	[E2],5
8.	$\Sigma\cup\{Qc\}$	Pc	[$E_{\to}$] 6, 7
9.	Σ	$(Pc \leftrightarrow Qc)$	[$I_{\leftrightarrow}$] 4, 8

La regla [$E_{\leftrightarrow}$]

Esta regla es muy parecida a la de eliminación del condicional. Si se trata de deducir β de Σ utilizando la regla [$E_{\leftrightarrow}$] basta deducir primero, para alguna sentencia α, α de Σ y, además, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ o $(\beta \leftrightarrow \alpha)$.

La regla [$I_{\forall}$]

Para deducir $\forall x\varphi$ de Σ con ayuda de la regla [$I_{\forall}$], elegimos una constante nueva c, es decir, una constante que no aparece ni en Σ ni en φ, y deducimos

$\varphi\binom{x}{c}$ de Σ. Precisamente para poder tener siempre a nuestra disposición constantes nuevas ampliamos el lenguaje con infinitas constantes auxiliares. Esta regla corresponde a la estrategia de demostración según la cual para mostrar que todo objeto tiene cierta propiedad, mostramos que un objeto *arbitrario* la tiene. Como ejemplo de uso de esta regla, deducimos $\forall xQx$ de $\{\forall x(Px \wedge Qx)\}$ mediante la derivación siguiente.

1.	$\{\forall x(Px \wedge Qx)\}$	$\forall x(Px \wedge Qx)$	[E1]
2.	$\{\forall x(Px \wedge Qx)\}$	$(Pc \wedge Qc)$	[$E_\forall$], 1
3.	$\{\forall x(Px \wedge Qx)\}$	Qc	[$E_\wedge$], 2
4.	$\{\forall x(Px \wedge Qx)\}$	$\forall xQx$	[$I_\forall$], 1

La derivación siguiente es *incorrecta*

1.	$\{\forall xRxx\}$	$\forall xRxx$	[E1]
2.	$\{\forall xRxx\}$	Rcc	[$E_\forall$], 1
3.	$\{\forall xRxx\}$	$\forall xRxc$	[$I_\forall$], 1

puesto que la constante c aparece en $\forall xRxc$. Obsérvese que $\forall xRxc$ no es consecuencia de $\forall xRxx$.

La regla [$E_\forall$]

Para deducir $\varphi\binom{x}{t}$ de Σ, donde t es un término cerrado, utilizando la regla [$E_\forall$], basta deducir primero $\forall x\varphi$ de Σ. Por ejemplo, podemos deducir $\forall xQx$ de $\Sigma = \{\forall xPx, \forall xPx \to \forall xQx\}$ mediante la derivación:

1.	Σ	$\forall xPx \to \forall xQx$	[E1]
2.	Σ	$\forall xPx$	[E1]
3.	Σ	$\forall xQx$	[$E_\to$], 1, 2
4.	Σ	Qc	[$E_\forall$], 3

La regla [$I_\exists$]

Si queremos deducir $\exists x\varphi$ de Σ utilizando la regla [$I_\exists$], debemos deducir primero $\varphi\binom{x}{t}$ para algún término cerrado t. Así, para deducir $\exists xPx$ de $\{\forall xPx\}$ procedemos como sigue:

1.	$\{\forall xPx\}$	$\forall xPx$	[E1]
2.	$\{\forall xPx\}$	Pc	[$E_\forall$], 1
3.	$\{\forall xPx\}$	$\exists xPx$	[$I_\exists$], 2

La regla [$I_\exists$] corresponde a la estrategia habitual según la cual para demostrar que existe algún objeto con cierta propiedad se muestra que un objeto particular la posee.

La regla [$E_\exists$]

Supongamos que queremos deducir α de Σ. Si de Σ hemos deducido $\exists x\varphi$, podemos aplicar la regla [$E_\exists$]. Para ello, elegimos una constante nueva c, es decir, una constante que no aparece ni en Σ ni en φ ni en α, y deducimos α de $\Sigma \cup \{\varphi\binom{x}{c}\}$. Esta regla corresponde a la estrategia de demostración que podemos resumir así: si sabemos que hay por lo menos un objeto que tiene cierta propiedad, podemos obtener consecuencias de este hecho eligiendo un objeto *arbitrario* que tiene la propiedad en cuestión y razonando con su ayuda. Como ejemplo de uso de esta regla deducimos $\exists xQx$ del conjunto $\Sigma = \{\forall x(Px \to Qx), \exists xPx\}$ mediante la derivación siguiente.

1.	Σ	$\exists xPx$	[E1]
2.	$\Sigma \cup \{Pc\}$	Pc	[E1]
3.	$\Sigma \cup \{Pc\}$	$\forall x(Px \to Qx)$	[E1]
4.	$\Sigma \cup \{Pc\}$	$(Pc \to Qc)$	[$E_\forall$], 3
5.	$\Sigma \cup \{Pc\}$	Qc	[$E_\to$], 2, 4
6.	$\Sigma \cup \{Pc\}$	$\exists xQx$	[$I_\exists$], 5
7.	Σ	$\exists xQx$	[$E_\exists$], 1, 6

En la línea 2 hemos introducido la premisa auxiliar Pc con el propósito de obtener, en la línea 6, $\exists xQx$ a partir de $\Sigma \cup \{Pc\}$ y aplicar luego la regla [$E_\exists$].

Las tres derivaciones siguientes son *incorrectas*. Cada una de ellas ilustra la necesidad de una de las restricciones impuestas en la regla [$E_\exists$] a la constante c.

1.	$\{\forall x(Px \to Rxc), \exists xPx\}$	$\exists xPx$	[E1]
2.	$\{\forall x(Px \to Rxc), \exists xPx, Pc\}$	Pc	[E1]
3.	$\{\forall x(Px \to Rxc), \exists xPx, Pc\}$	$\forall x(Px \to Rxc)$	[E1]
4.	$\{\forall x(Px \to Rxc), \exists xPx, Pc\}$	$(Pc \to Rcc)$	[$E_\forall$], 3
5.	$\{\forall x(Px \to Rxc), \exists xPx, Pc\}$	Rcc	[$E_\to$], 2, 4
6.	$\{\forall x(Px \to Rxc), \exists xPx, Pc\}$	$\exists xRxx$	[$I_\exists$], 5
7.	$\{\forall x(Px \to Rxc), \exists xPx\}$	$\exists xRxx$	[$E_\exists$], 1, 6

En esta derivación c aparece en una de las premisas, por lo que la aplicación de [$E_\exists$] en la línea 7 es incorrecta. Obsérvese que $\exists xRxx$ no es consecuencia

de $\{\forall x(Px \to Rxc), \exists xPx\}$.

1.	$\{\forall x(Px \to Rxx), \exists xPx\}$	$\exists xPx$	[E1]
2.	$\{\forall x(Px \to Rxx), \exists xPx, Pc\}$	Pc	[E1]
3.	$\{\forall x(Px \to Rxx), \exists xPx, Pc\}$	$\forall x(Px \to Rxx)$	[E1]
4.	$\{\forall x(Px \to Rxx), \exists xPx, Pc\}$	$(Pc \to Rcc)$	[$E_\forall$], 3
5.	$\{\forall x(Px \to Rxx), \exists xPx, Pc\}$	Rcc	[$E_\to$], 2, 4
6.	$\{\forall x(Px \to Rxx), \exists xPx, Pc\}$	$\exists xRxc$	[$I_\exists$], 5
7.	$\{\forall x(Px \to Rxx), \exists xPx\}$	$\exists xRxc$	[$E_\exists$], 1, 6

En esta derivación c aparece en la conclusión, por lo que la aplicación de [$E_\exists$] en la línea 7 es incorrecta. Obsérvese que $\exists xRxc$ no es consecuencia de $\{\forall x(Px \to Rxx), \exists xPx\}$.

1.	$\{\forall x(Rxx \to Qx), \exists xRcx\}$	$\exists xPx$	[E1]
2.	$\{\forall x(Rxx \to Qx), \exists xRcx, Rcc\}$	Rcc	[E1]
3.	$\{\forall x(Rxx \to Qx), \exists xRcx, Rcc\}$	$\forall x(Rxx \to Qx)$	[E1]
4.	$\{\forall x(Rxx \to Qx), \exists xRcx, Rcc\}$	$(Rcc \to Qc)$	[$E_\forall$], 3
5.	$\{\forall x(Rxx \to Qx), \exists xRcx, Rcc\}$	Qc	[$E_\to$], 2, 4
6.	$\{\forall x(Rxx \to Qx), \exists xRcx, Rcc\}$	$\exists xQx$	[$I_\exists$], 5
7.	$\{\forall x(Rxx \to Qx), \exists xRxc\}$	$\exists xQx$	[$E_\exists$], 1, 6

En esta derivación c aparece en $\exists xRcx$, por lo que la aplicación de [$E_\exists$] en la línea 7 es incorrecta. Obsérvese que $\exists xQx$ no es consecuencia de $\{\forall x(Rxx \to Qx), \exists xPx\}$.

Las reglas [$R_\approx$] y [$S_\approx$] de la igualdad

La primera regla de la igualdad, [$R_\approx$], requiere muy poco comentario. Permite derivar cualquier secuente de la forma $\langle\Sigma, t \approx t\rangle$, donde t es un término cerrado. De acuerdo con la segunda regla, [$S_\approx$], si t y t' son términos cerrados y de Σ hemos deducido la ecuación $t \approx t'$ y una sentencia $\varphi\binom{x}{t}$, podemos deducir la sentencia $\varphi\binom{x}{t'}$. Antes de dar un ejemplo de aplicación de esta regla es conveniente observar que una misma sentencia puede obtenerse por sustitución de una variable por un término en fórmulas muy diversas. Así, la fórmula Rcc es la sustitución de x por c en Rxx, pero también es la sustitución de x por c en Rcx o en Rxc, como es la sustitución de y por c en Ryy, en Rcy o en Ryc. Este hecho es importante para darse cuenta de las posibilidades de aplicación de la regla [$S_\approx$]. Gracias a ella, a partir del mismo conjunto $\{c \approx d, Rcc\}$ podemos deducir Rdd, Rdc y Rcd. Para deducir Rdd tenemos en cuenta que $Rcc = (Rxx)\binom{x}{c}$ y $Rdd = (Rxx)\binom{x}{d}$; para deducir Rdc utilizamos que

$Rcc = (Rxc)\binom{x}{c}$ y $Rdc = (Rxc)\binom{x}{d}$. Finalmente, obtenemos Rcd observando que $Rcc = (Rcx)\binom{x}{c}$ y $Rcd = (Rcx)\binom{x}{d}$. Como vemos, la regla [$S_\approx$] es muy versátil. Puede reformularse así:

> Si hemos derivado los secuente $\langle\Sigma, t \approx t'\rangle$ y $\langle\Sigma, \varphi\rangle$, donde t y t' son términos cerrados y en φ aparece el término cerrado t, podemos derivar cualquier secuente $\langle\Sigma, \varphi'\rangle$ que se obtenga a partir del secuente $\langle\Sigma, \varphi\rangle$ reemplazando una o más apariciones de t en φ por t'.

Por ejemplo, deducimos Rcd de $\Sigma = \{\forall xPx \to c \approx d, \forall xPx \to Rcc, \forall xPx\}$ mediante la derivación siguiente:

1.	Σ	$\forall xPx \to c \approx d$	[E1]
2.	Σ	$\forall xPx$	[E1]
3.	Σ	$c \approx d$	[$E_\to$], 2
4.	Σ	$\forall xPx \to Rcc$	[E1]
5.	Σ	Rcc	[$E_\to$], 2, 4
6.	Σ	Rcd	[$S_\approx$], 3, 5

Algunas derivaciones comentadas

Presentamos ahora algunas derivaciones comentadas que ilustran algunas estrategias de derivación.

(1) $\{Pc \to (Qc \wedge Tc)\} \vdash Pc \to (Qc \vee Lc)$

1.	$\{Pc \to (Qc \wedge Tc), Pc\}$	$Pc \to (Qc \wedge Tc)$	[E1]
2.	$\{Pc \to (Qc \wedge Tc), Pc\}$	Pc	[E1]
3.	$\{Pc \to (Qc \wedge Tc), Pc\}$	$Qc \wedge Tc$	[$E_\to$], 1, 2
4.	$\{Pc \to (Qc \wedge Tc), Pc\}$	Qc	[$E_\wedge$], 3
5.	$\{Pc \to (Qc \wedge Tc), Pc\}$	$Qc \vee Lc$	[$I_\vee$], 4
6.	$\{Pc \to (Qc \wedge Tc)\}$	$Pc \to (Qc \vee Lc)$	[$I_\to$], 5

Lo único que cabe destacar en esta derivación es que previendo el uso de la regla [$I_\to$] en la línea 6, hemos introducido la premisa auxiliar Pc desde el principio.

(2) $\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma, \delta \to \alpha, \delta \to \beta\} \vdash \delta \to \gamma$

Sea $\Sigma = \{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \delta \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \beta\}$.

1.	$\Sigma \cup \{\delta\}$	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$	[E1]
2.	$\Sigma \cup \{\delta\}$	$\delta \rightarrow \alpha$	[E1]
3.	$\Sigma \cup \{\delta\}$	$\delta \rightarrow \beta$	[E1]
4.	$\Sigma \cup \{\delta\}$	δ	[E1]
5.	$\Sigma \cup \{\delta\}$	α	$[E_{\rightarrow}]$, 2, 4
6.	$\Sigma \cup \{\delta\}$	β	$[E_{\rightarrow}]$, 3, 4
7.	$\Sigma \cup \{\delta\}$	$\alpha \wedge \beta$	$[I_{\wedge}]$, 5, 6
8.	$\Sigma \cup \{\delta\}$	γ	$[E_{\rightarrow}]$, 1, 7
9.	Σ	$\delta \rightarrow \gamma$	$[I_{\rightarrow}]$, 8

Puesto que nuestro objetivo final era deducir el condicional $(\delta \rightarrow \gamma)$ de Σ hemos introducido desde el principio su antecedente δ como premisa auxiliar, para obtener γ.

(3) $\{\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma), \alpha \wedge \neg\beta\} \vdash \gamma$

Sea $\Sigma = \{\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma), \alpha \wedge \neg\beta\}$

1.	Σ	$\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$	[E1]
2.	Σ	$\alpha \wedge \neg\beta$	[E1]
3.	Σ	α	$[E_{\wedge}]$, 2
4.	Σ	$\beta \vee \gamma$	$[E_{\rightarrow}]$, 1, 3
5.	$\Sigma \cup \{\gamma\}$	γ	[E1]
6.	$\Sigma \cup \{\beta, \neg\gamma\}$	$\alpha \wedge \neg\beta$	[E2], 2
7.	$\Sigma \cup \{\beta, \neg\gamma\}$	$\neg\beta$	$[E_{\wedge}]$, 6
8.	$\Sigma \cup \{\beta, \neg\gamma\}$	β	[E1]
9.	$\Sigma \cup \{\beta\}$	γ	$[E_{\neg}]$, 7, 8
10.	Σ	γ	$[E_{\vee}]$, 4, 5, 9

Una vez obtenida $\beta \vee \gamma$ en la línea 4, decidimos obtener γ aplicando la regla $[E_{\vee}]$, para lo cual es necesario obtener γ con ayuda de β y con ayuda de γ. Lo segundo es inmediato (línea 5); lo primero lo hacemos por reducción al absurdo (líneas 6-9).

(4) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

1.	$\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\}$	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	[E1]
2.	$\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha), \alpha\}$	α	[E1]
3.	$\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha), \alpha\}$	$\alpha \vee \neg\alpha$	$[I_{\vee}]$, 2
4.	$\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha), \alpha\}$	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	[E2], 1
5.	$\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\}$	$\neg\alpha$	$[I_{\neg}]$, 3, 4
6.	$\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\}$	$\alpha \vee \neg\alpha$	$[I_{\vee}]$, 5
7.	$\emptyset$	$\alpha \vee \neg\alpha$	$[E_{\neg}]$, 1, 6

Hay dos aspectos interesantes en este ejemplo. En primer lugar se trata de una deducción sin premisas. Por tanto, todas las premisas de la derivación son auxiliares y deben eliminarse, puesto que el último secuente de la derivación debe ser $\langle \emptyset, \alpha \vee \neg\alpha \rangle$. En segundo lugar, se ha utilizado la estrategia de demostración por reducción al absurdo: hemos comenzado suponiendo la negación de lo que deseábamos obtener y esta suposición nos ha llevado a una sentencia y a su negación (líneas 1 y 6).

(5) $\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall xPx \rightarrow \forall xQx$

1.	$\{\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall xPx\}$	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	[E1]
2.	$\{\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall xPx\}$	$\forall xPx$	[E1]
3.	$\{\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall xPx\}$	$Pc \rightarrow Qc$	$[E_{\forall}]$, 1
4.	$\{\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall xPx\}$	Pc	$[E_{\forall}]$, 2
5.	$\{\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall xQx\}$	Qc	$[E_{\rightarrow}]$, 3, 4
6.	$\{\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall xPx\}$	$\forall xQx$	$[I_{\forall}]$, 5
7.	$\{\forall x(Px \rightarrow Qx)\}$	$\forall xPx \rightarrow \forall xQx$	$[I_{\rightarrow}]$, 6

Puesto que se trata de deducir un condicional, introducimos ya desde el principio su antecedente $\forall xPx$ con el fin de obtener su consecuente $\forall xQx$. Esto último lo conseguimos eliminando el cuantificador universal de $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ y el de $\forall xPx$ usando la misma constante c y aplicando $[E_{\rightarrow}]$ para obtener Qc. Puesto que c no aparece en las premisas, la regla $[I_{\forall}]$ es aplicable y nos proporciona $\forall xQx$ en la línea 6.

(6) $\forall xyRxy \vdash \forall xRxx$

1.	$\{\forall xyRxy\}$	$\forall xyRxy$	[E1]
2.	$\{\forall xyRxy\}$	$\forall yRcy$	$[E_\forall]$, 1
3.	$\{\forall xyRxy\}$	Rcc	$[E_\forall]$, 2
4.	$\{\forall xyRxy\}$	$\forall xRxx$	$[I_\forall]$, 3

La estrategia es clara: eliminamos los dos cuantificadores de $\forall x\forall yRxy$ con la misma constante, obteniendo Rcc. Como c no aparece en la premisa, la regla $[I_\forall]$ nos permite obtener $\forall xRxx$.

(7) $\exists y\forall xRxy \vdash \forall x\exists yRxy$

1.	$\{\exists y\forall xRxy\}$	$\exists y\forall xRxy$	[E1]
2.	$\{\exists y\forall xRxy, \forall xRxc\}$	$\forall xRxc$	[E1], c constante nueva
3.	$\{\exists y\forall xRxy, \forall xRxc\}$	Rdc	$[E_\forall]$, 2, d constante nueva
4.	$\{\exists y\forall xRxy, \forall xRxc\}$	$\exists yRdy$	$[I_\exists]$, 3
5.	$\{\exists y\forall xRxy, \forall xRxc\}$	$\forall x\exists yRxy$	$[I_\forall]$, 4
6.	$\{\exists y\forall xRxy\}$	$\forall x\exists yRxy$	$[E_\exists]$, 1, 5

De acuerdo con la regla $[E_\exists]$, para deducir $\forall x\exists yRxy$ de $\exists y\forall xRxy$, basta que la deduzcamos del conjunto $\{\exists y\forall xRxy, \forall xRxc\}$. Esto es precisamente lo que hacemos. En la línea 3 eliminamos el cuantificador universal de $\forall xRxc$ con una constante, d, distinta a c, con el fin de poder aplicar más adelante (línea 5) la regla $[I_\forall]$, que exige que la constante sea nueva.

(8) $\{\forall xPx \vee \forall xQx\} \vdash \forall x(Px \vee Qx)$

1.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx\}$	$\forall xPx \vee \forall xQx$	[E1]
2.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx, \forall xPx\}$	$\forall xPx$	[E1]
3.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx, \forall xPx\}$	Pc	$[E_\forall]$, 2
4.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx, \forall xPx\}$	$Pc \vee Qc$	$[I_\vee]$, 3
5.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx, \forall xPx\}$	$\forall x(Px \vee Qx)$	$[I_\forall]$, 4
6.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx, \forall xQx\}$	$\forall xQx$	[E1]
7.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx, \forall xQx\}$	Qc	$[E_\forall]$, 6
8.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx, \forall xQx\}$	$Pc \vee Qc$	$[I_\vee]$, 7
9.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx, \forall xQx\}$	$\forall x(Px \vee Qx)$	$[I_\forall]$, 8
10.	$\{\forall xPx \vee \forall xQx\}$	$\forall x(Px \vee Qx)$	$[E_\vee]$, 1, 6, 9

Nuestra estrategia global ha consistido en obtener $\forall x(Px \vee Qx)$ tanto a partir de $\forall xPx$ como a partir de $\forall xQx$, para poder aplicar la regla $[E_\vee]$. Los pasos seguidos para ello son claros; basta examinar las líneas 2-5 ya que las líneas 6-9 son análogas.

(9) $\forall x(Px \vee Qx) \vdash \exists xPx \vee \exists xQx$

1.	$\{\forall x(Px \vee Qx)\}$	$\forall x(Px \vee Qx)$	[E1]
2.	$\{\forall x(Px \vee Qx)\}$	$Pc \vee Qc$	$[E_\forall]$, 1
3.	$\{\forall x(Px \vee Qx), Pc\}$	Pc	[E1]
4.	$\{\forall x(Px \vee Qx), Pc\}$	$\exists xPx$	$[I_\exists]$, 3
5.	$\{\forall x(Px \vee Qx), Pc\}$	$\exists xPx \vee \exists xQx$	$[I_\vee]$, 4
6.	$\{\forall x(Px \vee Qx), Qc\}$	Qc	[E1]
7.	$\{\forall x(Px \vee Qx), Qc\}$	$\exists xQx$	$[I_\exists]$, 6
8.	$\{\forall x(Px \vee Qx), Qc\}$	$\exists xPx \vee \exists xQx$	$[I_\vee]$, 7
9.	$\{\forall x(Px \vee Qx)\}$	$\exists xPx \vee \exists xQx$	$[E_\vee]$, 2, 5, 8

En la línea 2 hemos eliminado el cuantificador universal obteniendo la sentencia $Pc \vee Qc$. Luego hemos obtenido $\exists xPx \vee \exists xQx$ tanto a partir de Pc (línea 5) como a partir de Qc (línea 8), lo cual nos permite aplicar $[E_\vee]$.

(10) $Pfc \vdash \forall x(fc \approx x \to Px)$

1.	$\{Pfc\}$	Pfc	[E1]
2.	$\{Pfc, fc \approx d\}$	$fc \approx d$	[E1], 1
3.	$\{Pfc, fc \approx d\}$	Pfc	[E2], 1
4.	$\{Pfc, fc \approx d\}$	Pd	$[S_\approx]$, 2, 3
5.	$\{Pfc\}$	$fc \approx d \to Pd$	$[I_\to]$, 4
6.	$\{Pfc\}$	$\forall x(fc \approx x \to Px)$	$[I_\forall]$, 5

De acuerdo con $[I_\forall]$, para deducir la sentencia universal $\forall x(x \approx fc \to Px)$ a partir de Pfc, basta obtener la sentencia $(fc \approx d \to Pd)$, donde d es cualquier constante nueva (es decir, distinta de c). Dado que esta sentencia es un condicional, por $[I_\to]$, basta obtener Pd con ayuda de $fc \approx d$. Esto es lo que hacemos en la línea 4 aplicando la regla $[S_\approx]$.

(11) $\vdash \forall x \exists y fx \approx y$

1.	$\emptyset$	$fc \approx fc$	$[\mathrm{R}_{\approx}]$
2.	$\emptyset$	$\exists y fc \approx y$	$[\mathrm{I}_{\exists}]$, 1
3.	$\emptyset$	$\forall x \exists y fx \approx y$	$[\mathrm{I}_{\forall}]$, 2

En la línea 3 hemos podido utilizar la regla $[\mathrm{I}_{\forall}]$ puesto que la constante c no aparece en las premisas, ya que no las hay. En la aplicación de $[\mathrm{I}_{\exists}]$ a la línea 1 para obtener la línea 2 hemos tenido en cuenta que $(fc \approx fc)$ es $(fc \approx y)\binom{y}{fc}$.

(12) $\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c) \vdash \exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y \approx x))$

1.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	$\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)$	[E1]
2.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	$(Pc \leftrightarrow c \approx c)$	$[\mathrm{E}_{\forall}]$, 1
3.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	$c \approx c$	$[\mathrm{R}_{\approx}]$
4.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	Pc	$[\mathrm{E}_{\leftrightarrow}]$, 2, 3
5.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c), Pd\}$	Pd	[E1]
6.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	$Pd \leftrightarrow d \approx c$	$[\mathrm{E}_{\forall}]$, 1
7.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c), Pd\}$	$Pd \leftrightarrow d \approx c$	[E2], 6
8.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c), Pd\}$	$d \approx c$	$[\mathrm{E}_{\leftrightarrow}]$, 5, 7
9.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	$Pd \rightarrow d \approx c$	$[\mathrm{I}_{\rightarrow}]$, 8
10.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	$\forall y(Py \rightarrow y \approx c)$	$[\mathrm{I}_{\forall}]$, 9
11.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	$Pc \wedge \forall y(Py \rightarrow y \approx c)$	$[\mathrm{I}_{\wedge}]$, 4, 10
12.	$\{\forall x(Px \leftrightarrow x \approx c)\}$	$\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y \approx x))$	$[\mathrm{I}_{\exists}]$, 11

Lo único que destacamos en esta derivación es la aplicación de $[\mathrm{I}_{\forall}]$ para pasar de la línea 9 a la 10. Podemos hacerlo, ya que $(Pd \rightarrow d \approx c)$ es la sustitución de y por d en $(Py \rightarrow y \approx c)$ y d no aparece en la premisa ni en $(Py \rightarrow y \approx c)$.

3. Reglas derivadas

Cuando utilizamos el cálculo deductivo, a menudo repetimos ciertos pasos una y otra vez. Para evitar estas repeticiones y simplificar la tarea introducimos **reglas derivadas**. Son reglas que tienen la misma forma y se usan del mismo modo que las reglas **primitivas** del cálculo, es decir, las reglas originales, pero han sido previamente justificadas a partir de éstas. Las reglas derivadas son reglas correctas: si los secuentes a los que se aplican son correctos el secuente que se obtiene también lo es. Además, las reglas derivadas

son, en sentido estricto, innecesarias, ya que no nos permiten derivar ningún secuente que no podamos derivar con sólo las reglas primitivas.

Una **justificación de una regla derivada** es como una derivación en el cálculo con la única diferencia de que sus primeras líneas son los secuentes superiores de la regla. Por ejemplo, para justificar que

$$\begin{array}{cc} \Sigma & \alpha \\ \Sigma & \neg\alpha \\ \hline \Sigma & \beta \end{array}$$

es una regla derivada construimos una sucesión de secuentes cuyas dos primeras líneas son $\langle \Sigma, \alpha \rangle$ y $\langle \Sigma, \neg\alpha \rangle$, cuya última línea es $\langle \Sigma, \beta \rangle$ y tal que toda línea, a excepción de las dos primeras, se obtiene de líneas anteriores aplicando las reglas del cálculo. En este apartado, a estas sucesiones de secuentes también las llamaremos derivaciones, a pesar de que las líneas que contienen los secuentes de partida no se obtienen por aplicación de las reglas del cálculo. La justificación de una regla derivada muestra que todo secuente obtenido con su ayuda puede obtenerse también sin ella; para ello basta reemplazar cada uso de la regla por su justificación convenientemente adaptada a la situación. Por esta razón podemos usar las reglas derivadas.

Reglas derivadas para las conectivas

Contradicción

$$[\mathrm{CD}] \quad \begin{array}{cc} \Sigma & \alpha \\ \Sigma & \neg\alpha \\ \hline \Sigma & \beta \end{array}$$

Doble negación

$$[\mathrm{DN}] \quad \begin{array}{cc} \Sigma & \alpha \\ \hline \Sigma & \neg\neg\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \Sigma & \neg\neg\alpha \\ \hline \Sigma & \alpha \end{array}$$

Modus Tollens

$$[\mathrm{MT}] \quad \begin{array}{cc} \Sigma & \alpha \rightarrow \beta \\ \Sigma & \neg\beta \\ \hline \Sigma & \neg\alpha \end{array}$$

ELIMINACIÓN DE UN DILEMA

$$[\mathrm{ED}]\qquad \frac{\begin{array}{cc}\Sigma & \alpha\vee\beta\\ \Sigma & \neg\alpha\end{array}}{\begin{array}{cc}\Sigma & \beta\end{array}}\qquad\qquad \frac{\begin{array}{cc}\Sigma & \alpha\vee\beta\\ \Sigma & \neg\beta\end{array}}{\begin{array}{cc}\Sigma & \beta\end{array}}$$

A continuación justificaremos las reglas [CD], [MT], una de las reglas [DN] y una de las reglas [ED]. La justificación de las restantes se deja como ejercicio.

[CD]

1.	Σ	α	Suposición
2.	Σ	$\neg\alpha$	Suposición
3.	$\Sigma\cup\{\neg\beta\}$	α	[E2], 1
4.	$\Sigma\cup\{\neg\beta\}$	$\neg\alpha$	[E2], 2
5.	Σ	β	[$E_\neg$], 3, 4

[DN]

1.	Σ	$\neg\neg\alpha$	Suposición
2.	$\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$	$\neg\alpha$	[E1]
3.	$\Sigma\cup\{\neg\alpha\}$	$\neg\neg\alpha$	[E2], 1
4.	Σ	α	[$E_\neg$], 2, 3

[MT]

1.	Σ	$\alpha\rightarrow\beta$	Suposición
2.	Σ	$\neg\beta$	Suposición
3.	$\Sigma\cup\{\alpha\}$	α	[E1]
4.	$\Sigma\cup\{\alpha\}$	$\alpha\rightarrow\beta$	[E2], 1
5.	$\Sigma\cup\{\alpha\}$	β	[$E_\rightarrow$], 3, 4
6.	$\Sigma\cup\{\alpha\}$	$\neg\beta$	[E2], 2
7.	Σ	$\neg\alpha$	[$I_\neg$], 5, 6

[ED]

1.	Σ	$\alpha\vee\beta$	Suposición
2.	Σ	$\neg\alpha$	Suposición
3.	$\Sigma\cup\{\alpha\}$	α	[E1]
4.	$\Sigma\cup\{\alpha\}$	$\neg\alpha$	[E2], 2
5.	$\Sigma\cup\{\alpha\}$	β	[CD], 3, 4
6.	$\Sigma\cup\{\beta\}$	β	[E1]
7.	Σ	β	[$E_\vee$],1, 5, 6

REGLAS DERIVADAS PARA CUANTIFICADORES

CAMBIO DE VARIABLE

$$[\mathrm{CV}]\qquad \frac{\Sigma\quad \forall x\alpha}{\Sigma\quad \forall y\alpha\binom{x}{y}}\qquad\qquad \frac{\Sigma\quad \exists x\alpha}{\Sigma\quad \exists y\alpha\binom{x}{y}}$$, si y no aparece en α

EQUIVALENCIA DE CUANTIFICADORES

$$[\mathrm{CU}]\qquad \frac{\Sigma\quad \forall x\alpha}{\Sigma\quad \neg\exists x\neg\alpha}\qquad\qquad \frac{\Sigma\quad \neg\forall x\alpha}{\Sigma\quad \exists x\neg\alpha}$$

$$[\mathrm{CE}]\qquad \frac{\Sigma\quad \exists x\alpha}{\Sigma\quad \neg\forall x\neg\alpha}\qquad\qquad \frac{\Sigma\quad \neg\exists x\alpha}{\Sigma\quad \forall x\neg\alpha}$$

Justificamos ahora cada una de estas reglas.

[CV]

1.	Σ	$\forall x\alpha$	Suposición
2.	Σ	$\alpha\binom{x}{c}$	[$E_\forall$], 1, c constante nueva
3.	Σ	$\forall y\alpha\binom{x}{y}$	[$I_\forall$], 2, pues c no aparece en $\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{y}\}$ y $\alpha\binom{x}{c}$ es igual a $\alpha\binom{x}{y}\binom{y}{c}$

1.	Σ	$\exists x\alpha$	Suposición
2.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c}\}$	$\alpha\binom{x}{c}$	[E1], c constante nueva
3.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c}\}$	$\exists y\alpha\binom{x}{y}$	$[\mathrm{I}_\exists]$, 2, pues $\alpha\binom{x}{c}$ es $\alpha\binom{x}{y}\binom{y}{c}$
4.	Σ	$\exists y\alpha\binom{x}{y}$	$[\mathrm{E}_\exists]$, 1, 3

[CE]

1.	Σ	$\exists x\alpha$	Suposición
2.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c}\}$	$\alpha\binom{x}{c}$	[E1], c constante nueva
3.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c},\forall x\neg\alpha\}$	$\forall x\neg\alpha$	[E1]
4.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c},\forall x\neg\alpha\}$	$\neg\alpha\binom{x}{c}$	$[\mathrm{E}_\forall]$, 3
5.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c},\forall x\neg\alpha\}$	$\alpha\binom{x}{c}$	[E2], 2
6.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c}\}$	$\neg\forall x\neg\alpha$	$[\mathrm{I}_\neg]$, 2, 4
7.	Σ	$\neg\forall x\neg\alpha$	$[\mathrm{E}_\exists]$, 1, 6

1.	Σ	$\neg\exists x\alpha$	Suposición
2.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c}\}$	$\alpha\binom{x}{c}$	[E1], c constante nueva
3.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c}\}$	$\exists x\alpha$	$[\mathrm{I}_\exists]$, 2
4.	$\Sigma\cup\{\alpha\binom{x}{c}\}$	$\neg\exists x\alpha$	[E2], 1
5.	Σ	$\neg\alpha\binom{x}{c}$	$[\mathrm{I}_\neg]$, 3, 4
6.	Σ	$\forall x\neg\alpha$	$[\mathrm{I}_\forall]$, 5

[CU]

1.	Σ	$\forall x\alpha$	Suposición
2.	$\Sigma\cup\{\exists x\neg\alpha\}$	$\exists x\neg\alpha$	[E1]
3.	$\Sigma\cup\{\exists x\neg\alpha,\neg\alpha\binom{x}{c}\}$	$\neg\alpha\binom{x}{c}$	[E1], c constante nueva
4.	$\Sigma\cup\{\exists x\neg\alpha,\neg\alpha\binom{x}{c}\}$	$\forall x\ \alpha$	[E2], 1
5.	$\Sigma\cup\{\exists x\neg\alpha,\neg\alpha\binom{x}{c}\}$	$\alpha\binom{x}{c}$	$[\mathrm{E}_\forall]$, 4
6.	$\Sigma\cup\{\exists x\neg\alpha,\neg\alpha\binom{x}{c}\}$	$\neg\exists x\neg\alpha$	$[\mathrm{I}_\neg]$, 3, 5
7.	$\Sigma\cup\{\exists x\neg\alpha\}$	$\neg\exists x\alpha$	$[\mathrm{E}_\exists]$, 2, 6
8.	Σ	$\neg\exists x\neg\alpha$	$[\mathrm{E}_\neg]$, 2, 7

1.	Σ	$\neg\forall x\alpha$	Suposición
2.	$\Sigma\cup\{\neg\exists x\neg\alpha,\neg\alpha\binom{x}{c}\}$	$\neg\alpha\binom{x}{c}$	[E1], c constante nueva
3.	$\Sigma\cup\{\neg\exists x\neg\alpha,\neg\alpha\binom{x}{c}\}$	$\exists x\neg\alpha$	$[\mathrm{I}_\exists]$, 2
4.	$\Sigma\cup\{\neg\exists x\neg\alpha,\neg\alpha\binom{x}{c}\}$	$\neg\exists x\neg\alpha$	[E1]
5.	$\Sigma\cup\{\neg\exists x\neg\alpha\}$	$\alpha\binom{x}{c}$	$[\mathrm{E}_\neg]$, 3, 4
6.	$\Sigma\cup\{\neg\exists x\neg\alpha\}$	$\forall x\alpha$	$[\mathrm{I}{-}\forall]$, 5
7.	$\Sigma\cup\{\neg\exists x\neg\alpha\}$	$\neg\forall x\alpha$	[E2], 1
8.	Σ	$\exists x\neg\alpha$	$[\mathrm{E}_\neg]$, 6, 7

Reglas derivadas para la igualdad

Las propiedades características de la igualdad son la reflexividad, la simetría, la transitividad y la sustitución de iguales por iguales. La regla $[\mathrm{R}_\approx]$ corresponde a la reflexividad y la regla $[\mathrm{S}_\approx]$ a la sustitución de iguales por iguales. Las siguientes reglas derivadas muestran que la simetría y la transitividad se obtienen a partir de las reglas primitivas.

Simetría

$$[\mathrm{SI}]\qquad \frac{\Sigma \quad t_1\approx t_2}{\Sigma \quad t_2\approx t_1},\ \text{donde } t_1 \text{ y } t_2 \text{ son términos cerrados}$$

Transitividad

$$[\mathrm{TR}]\qquad \frac{\begin{array}{ll}\Sigma & t_1\approx t_2\\ \Sigma & t_2\approx t_3\end{array}}{\Sigma \quad t_1\approx t_3},\ \text{donde } t_1,\ t_2 \text{ y } t_3 \text{ son términos cerrados}$$

Justificaremos la simetría y dejaremos la justificación de la transitividad como ejercicio.

1.	Σ	$t_1\approx t_2$	Suposición
2.	Σ	$t_1\approx t_1$	$[\mathrm{R}_\approx]$
3.	Σ	$t_2\approx t_1$	$[\mathrm{S}_\approx]$, 2, 1, pues $(t_1\approx t_1)=(x\approx t_1)\binom{x}{t_1}$.

4. Algunos principios sobre deducibilidad

La siguiente proposición pone de manifiesto la conexión que existe entre las reglas derivadas y la relación de deducibilidad.

PROPOSICIÓN 16.1. *Para cualesquiera sentencias* α *y* β,

(1) $\alpha \vdash \beta$ *si y sólo si para cada conjunto finito* Σ *de sentencias,*

$$\frac{\Sigma \quad \alpha}{\Sigma \quad \beta}$$

es una regla primitiva o derivada.

(2) $\{\alpha,\gamma\} \vdash \beta$ *si y sólo si para cada conjunto finito* Σ *de sentencias,*

$$\frac{\begin{array}{cc}\Sigma & \alpha \\ \Sigma & \gamma\end{array}}{\Sigma \quad \beta}$$

es una regla primitiva o derivada.

DEMOSTRACIÓN. Justificamos (2), ya que la demostración de (1) es análoga. Supongamos en primer lugar que $\{\alpha,\gamma\} \vdash \beta$. Si la regla en cuestión es primitiva, no hay nada que justificar. Si no lo es, consideremos una derivación D del secuente $\langle\{\alpha,\gamma\},\beta\rangle$. Construyamos ahora la derivación cuyas dos primeras líneas son $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ y $\langle\Sigma,\gamma\rangle$, cuyas líneas siguientes $(3,\ldots,n)$ son las de la derivación D, y que sigue como se indica a continuación:

1.	Σ	α	
2.	Σ	γ	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n.	$\{\alpha,\gamma\}$	β	
$n+1$.	$\Sigma \cup \{\alpha,\gamma\}$	β	[E2], n
$n+2$.	$\Sigma \cup \{\alpha\}$	$\gamma \to \beta$	$[\mathrm{I}_{\to}]$, $n+1$
$n+3$.	Σ	$\alpha \to (\gamma \to \beta)$	$[\mathrm{I}_{\to}]$, $n+2$
$n+4$.	Σ	$\gamma \to \beta$	$[\mathrm{E}_{\to}]$, 1, $n+3$
$n+5$.	Σ	β	$[\mathrm{E}_{\to}]$, 2, $n+4$.

Esta derivación es una justificación de la regla

$$\frac{\begin{array}{cc}\Sigma & \alpha \\ \Sigma & \gamma\end{array}}{\Sigma \quad \beta}.$$

Supongamos ahora que esta regla es una regla primitiva o derivada y, por tanto, podemos usarla en las derivaciones. La derivación

1.	$\{\alpha,\gamma\}$	α	[E1]
2.	$\{\alpha,\gamma\}$	γ	[E1]
3.	$\{\alpha,\gamma\}$	β	por la regla

muestra que el secuente $\langle\{\alpha,\gamma\},\beta\rangle$ es derivable. □

PROPOSICIÓN 16.2. *Sean* α, β *y* γ *sentencias cualesquiera y supongamos que para todo conjunto finito* Σ *de sentencias*

$$\frac{\begin{array}{cc}\Sigma & \alpha \\ \Sigma & \beta\end{array}}{\Sigma \quad \gamma}$$

es una regla, primitiva o derivada. En tal caso, para cualquier conjunto de sentencias Γ, *si* $\Gamma \vdash \alpha$ *y* $\Gamma \vdash \beta$ *entonces* $\Gamma \vdash \gamma$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{R}$ es una regla primitiva o derivada de la forma indicada en la proposición y que $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$. Sean $\Sigma_1 \subseteq \Gamma$ y $\Sigma_2 \subseteq \Gamma$ conjuntos finitos de sentencias tales que $\Sigma_1 \vdash \alpha$ y $\Sigma_2 \vdash \beta$. Así, los secuentes $\langle\Sigma_1,\alpha\rangle$ y $\langle\Sigma_2,\beta\rangle$ son derivables. Construyamos una derivación cuyas primeras líneas son las de una derivación de $\langle\Sigma_1,\alpha\rangle$, cuyas líneas siguientes son las de una derivación de $\langle\Sigma_2,\beta\rangle$ y que sigue con los secuentes $\langle\Sigma_1 \cup \Sigma_2,\alpha\rangle$ y $\langle\Sigma_1 \cup \Sigma_2,\beta\rangle$, lo que es posible gracias a la regla [E2]. Ahora la regla $\mathcal{R}$ permite continuar la derivación añadiendo el secuente $\langle\Sigma_1 \cup \Sigma_2,\gamma\rangle$. Por tanto, $\Gamma \vdash \gamma$. □

A continuación presentamos algunos principios fundamentales sobre la relación de deducibilidad. El primero corresponde a las reglas estructurales.

PROPOSICIÓN 16.3. *Para cualesquiera conjuntos de sentencias* Γ *y* Δ *y cualquier fórmula* α,

(1) *si* $\alpha \in \Gamma$, *entonces* $\Gamma \vdash \alpha$,

(2) *si* $\Gamma \vdash \alpha$, *entonces* $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Puesto que gracias a la regla [E1] el secuente $\langle\{\alpha\},\alpha\rangle$ es derivable, si $\alpha \in \Gamma$, $\Gamma \vdash \alpha$. (2) Si $\Gamma \vdash \alpha$, sea $\Sigma \subseteq \Gamma$ un conjunto finito tal

que el secuente $\langle\Sigma,\alpha\rangle$ es derivable. Puesto que $\Sigma\subseteq\Gamma\cup\Delta$, tenemos que también $\Gamma\cup\Delta\vdash\alpha$. □

Los dos principios siguientes están estrechamente ligados a las reglas de eliminación del condicional y de introducción del condicional. El primero es un caso particular de la proposición 16.2.

Proposición 16.4. *Sean α y β sentencias y Γ un conjunto de sentencias;*

$$si\ \Gamma\vdash(\alpha\to\beta)\ y\ \Gamma\vdash\alpha,\ entonces\ \Gamma\vdash\beta.$$

Demostración. Se sigue de la proposición 16.2 y la regla $[E_{\to}]$. □

Teorema 16.5. (de deducción) *Sean α y β sentencias y Γ un conjunto de sentencias;*

$$si\ \Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta,\ entonces\ \Gamma\vdash\alpha\to\beta.$$

Demostración. Supongamos que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$. Esto significa que hay un conjunto finito $\Sigma\subseteq\Gamma\cup\{\alpha\}$ tal que el secuente $\langle\Sigma,\beta\rangle$ es derivable. Consideremos el conjunto $\Delta=\Sigma-\{\alpha\}$. Entonces el secuente $\langle\Delta\cup\{\alpha\},\beta\rangle$ también es derivable (puesto que, si $\alpha\in\Sigma$, $\Delta\cup\{\alpha\}=\Sigma$; y si $\alpha\notin\Sigma$, el secuente se obtiene por la regla [E2] extendiendo cualquier derivación de $\langle\Sigma,\beta\rangle$). Prolonguemos una derivación de $\langle\Delta\cup\{\alpha\},\beta\rangle$ añadiendo el secuente $\langle\Delta,(\alpha\to\beta)\rangle$ gracias a la regla $[I_{\to}]$. De este modo obtenemos una derivación de $\langle\Delta,(\alpha\to\beta)\rangle$. Puesto que $\Delta\subseteq\Gamma$, concluimos que $\Gamma\vdash(\alpha\to\beta)$. □

Los tres principios siguientes muestran que la deducibilidad es transitiva.

Proposición 16.6. *Sean α y β dos sentencias y sea Γ un conjunto de sentencias;*

$$si\ \Gamma\vdash\alpha\ y\ \alpha\vdash\gamma,\ entonces\ \Gamma\vdash\gamma.$$

Demostración. Supongamos que $\Gamma\vdash\alpha$ y que $\alpha\vdash\gamma$. Entonces, por el teorema de deducción $\vdash\alpha\to\gamma$. Por tanto, por la proposición 16.3, $\Gamma\vdash\alpha\to\gamma$. Finalmente, por la proposición 16.4, obtenemos que $\Gamma\vdash\gamma$. □

Proposición 16.7. *Para cada n, para cada sentencia γ y cualesquiera sentencias β_i con $i\leq n$, si para cada $i\leq n$, $\Gamma\vdash\beta_i$ y $\{\beta_0,\dots,\beta_n\}\vdash\gamma$, entonces $\Gamma\vdash\gamma$.*

Demostración. La demostración se hace por inducción para los números naturales. Si $n=0$, se trata de la proposición anterior, pues en este caso tenemos una sola fórmula. Supongamos que lo que queremos demostrar vale para n y demostremos que vale para $n+1$. Supongamos pues que $\{\beta_0,\dots,\beta_{n+1}\}\vdash\gamma$ y que para cada $i\leq n+1$, $\Gamma\vdash\beta_i$. Entonces, por el teorema de deducción, $\{\beta_0,\dots,\beta_n\}\vdash(\beta_{n+1}\to\gamma)$. Por la hipótesis inductiva, el resultado vale para conjuntos de n sentencias. Por tanto, $\Gamma\vdash(\beta_{n+1}\to\gamma)$. Finalmente, por la proposicion 16.4, puesto que $\Gamma\vdash\beta_{n+1}$, obtenemos que $\Gamma\vdash\gamma$. □

Proposición 16.8. *Si $\Sigma\vdash\gamma$ y para cada $\beta\in\Sigma$, $\Gamma\vdash\beta$, entonces $\Gamma\vdash\gamma$.*

Demostración. Supongamos que $\Sigma\vdash\gamma$ y para cada $\beta\in\Sigma$, $\Gamma\vdash\beta$. Sea, pues, Σ' un subconjunto finito de Σ tal que $\Sigma'\vdash\gamma$. Puesto que para cada $\beta\in\Sigma'$, $\Gamma\vdash\beta$, por la proposición anterior tenemos que $\Gamma\vdash\gamma$. □

5. Ejercicios

1. Justifique cada una de las siguientes afirmaciones mediante una derivación.

   (1) $Pc\to Qc\vdash Pc\to(Tc\to Qc)$,
   (2) $Pc\to(Qc\to Tc)\vdash(Pc\wedge Qc)\to Tc$,
   (3) $\{(Pc\to Qc),(Pc\to\neg Qc)\}\vdash(Pc\to Tc)$,
   (4) $Pc\to(Qc\to Tc)\vdash Qc\to(Pc\to Tc)$,
   (5) $(Pc\to\neg Qc)\wedge Qc\vdash\neg Pc$,
   (6) $(Pc\to\neg Pc)\vdash\neg Pc$.

2. Justifique cada una de las siguientes afirmaciones mediante una derivación.

   (1) $\{\forall x(Px\to Qx),\forall xPx\}\vdash\forall yQy$,
   (2) $\forall xPx\vdash\forall yPy$,
   (3) $\exists xPx\vdash\exists yPy$,
   (4) $\forall x(Pc\to Qx)\vdash Pc\to\forall xQx$,
   (5) $\exists y\forall xRxy\vdash\exists yRyy$,
   (6) $\exists x(Pc\wedge Qx)\vdash Pc\wedge\exists xQx$.

3. Justifique cada una de las siguientes afirmaciones mediante una derivación.

   (1) $Pc\wedge\exists xQx\vdash\exists x(Pc\wedge Qx)$,
   (2) $\exists x(Px\wedge Qx)\vdash\exists xPx\wedge\exists xQx$,
   (3) $Pc\vdash\forall x(x\approx c\to Px)$,
   (4) $\forall x(x\approx c\to Px)\vdash Pc$,

(5) $Pc \vdash \exists x(x \approx c \wedge Px)$,

(6) $\exists x(x \approx c \wedge Px) \vdash Pc$.

4. Justifique que las siguientes reglas son derivadas.

(1) $\dfrac{\Sigma \quad \alpha}{\Sigma \quad \alpha \to \beta}$

(2) $\dfrac{\Sigma \quad \neg\alpha}{\Sigma \quad \alpha \to \beta}$

(3) $\dfrac{\Sigma \cup \{\alpha\} \quad \beta}{\Sigma \cup \{\neg\beta\} \quad \neg\alpha}$

(4) $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \cup \{\alpha\} & \beta \\ \Sigma \cup \{\neg\alpha\} & \beta\end{matrix}}{\Sigma \quad \beta}$

5. Justifique la regla derivada [TR] para la igualdad.

6. Justifique cada una de las siguientes afirmaciones mediante una derivación.

(1) $(\alpha \to \neg\alpha) \vdash \neg\alpha$,
(2) $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$,
(3) $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$,
(4) $\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$.

7. Justifique cada una de las siguientes afirmaciones mediante una derivación.

(1) $(\alpha \to \beta) \vdash (\neg\alpha \vee \beta)$,
(2) $(\neg\alpha \vee \beta) \vdash (\alpha \to \beta)$,
(3) $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash (\neg\alpha \vee \neg\beta)$,
(4) $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$,
(5) $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$.

8. Justifique cada una de las siguientes afirmaciones mediante una derivación.

(1) $\vdash \exists x(Px \to \forall xPx)$,
(2) $\forall xPx \vee \forall xQx \vdash \forall x(Px \vee Qx)$,
(3) $\forall x(Px \to Qx) \vdash (\forall xPx \to \forall xQx)$,
(4) $\forall x(Px \vee Qx) \vdash \exists xPx \vee \exists xQx$,
(5) $\forall x(Px \to Qx) \vdash \exists xPx \to \exists xQx$.

9. Muestre mediante una derivación que

$$\{\exists xRxx, \forall xy((Rxy \wedge Ryy) \to x \approx y)\} \vdash \exists x\forall y(Ryy \to x \approx y).$$

10. Muestre mediante una derivación que

$$\{\forall x\exists yRxy, \forall xy(Rxy \to \forall zRzy)\} \vdash \exists y\forall xRxy.$$

11. Sea g un símbolo funcional binario. Muestre que

$$\vdash \forall xy\exists z gxy \approx z.$$

12. Considere las sentencias siguientes

$\alpha_1 = \forall xyz\, gxgyz \approx ggxyz$,

$\alpha_2 = \forall x\, gxhx \approx 0$,

$\alpha_3 = \forall x\, gx0 \approx x$,

$\alpha_4 = \forall xy\, gxy \approx gyx$,

en las que g es un símbolo funcional binario, h es un símbolo funcional unario y 0 es una constante individual. Para entender mejor estas sentencias puede suponer que están interpretadas en la estructura $\mathcal{Z}$ en la que el universo es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, la interpretación de g es la función suma, es decir, para cada $n,m \in \mathbb{Z}, g^{\mathcal{Z}}(n,m) = n+m$, y la interpretación de h es tal que para cada $n \in \mathbb{Z}, h^{\mathcal{Z}}(n) = -n$ y $0^{\mathcal{Z}} = 0$. Muestre que

(1) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vdash \forall xy\exists z\, gxz \approx y$,
(2) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vdash \forall xy(gxy \approx 0 \to y \approx hx)$.

Capítulo 17

TEORÍAS Y MODELOS

1. Introducción y preliminares

El cálculo deductivo introducido en el capítulo anterior nos permite obtener consecuencias de conjuntos de sentencias. La razón es que las reglas de inferencia del cálculo, con cuya ayuda construimos las derivaciones, transforman secuentes correctos en secuentes correctos. Vemos que las reglas tienen esta propiedad porque cada una de ellas se ocupa de la introducción o de la eliminación de un símbolo lógico y sabemos cómo cada uno de los símbolos lógicos influye en el valor de verdad de una sentencia obtenida a partir de otras: el modo preciso de cómo influye lo describen las distintas cláusulas de la definición de verdad de una sentencia en una estructura.

Esta propiedad del cálculo deductivo, su corrección, nos garantiza que toda sentencia deducible de un conjunto de sentencias es consecuencia lógica del conjunto. Pero el cálculo que hemos presentado no es sólo correcto, sino también completo, en cuanto toda consecuencia de un conjunto de sentencias es deducible del conjunto. Esto significa que las reglas que hemos introducido son suficientes para obtener todas las consecuencias lógicas de cualquier conjunto de sentencias. La demostración de la completud del cálculo, un resultado mucho más profundo que su corrección, ocupará la primera parte de este capítulo.

De la demostración del teorema de completud obtendremos como subproductos otros dos teoremas importantes, el de compacidad y el de Löwenheim-Skolem. Tras dar algunas aplicaciones de estos teoremas, pasaremos a ocuparnos de teorías formalizadadas en lenguajes de primer orden, haciendo hincapié en su modo de obtención y en la posibilidad de que admitan o no un conjunto finito de axiomas. Concluiremos discutiendo la ampliación del lenguaje de una teoría mediante la introducción de símbolos definidos.

La primera demostración de la completud de un cálculo deductivo para la lógica de primer orden la obtuvo Kurt Gödel en 1929. Veinte años más tarde, Leon Henkin publicó una nueva demostración, en la que introdujo un procedimiento muy fructífero para obtener modelos de teorías consistentes. La demostración que nosotros ofrecemos es esencialmente la de Henkin.

En varias ocasiones a lo largo de este capítulo nos veremos en la necesidad de considerar distintos lenguajes, más concretamente, de ampliar un lenguaje añadiéndole símbolos propios. Este proceder no es nuevo para nosotros, pues ya ampliamos el lenguaje de partida con un número infinito de constantes auxiliares cuando introdujimos el cálculo deductivo. Ahora bien, las definiciones que hemos dado de los conceptos lógicos fundamentales, como la validez lógica o la relación de consecuencia, están formuladas para lenguajes determinados, por lo que es preciso justificar que se mantienen invariantes con respecto a los cambios de lenguaje.

Supongamos que α es una sentencia de un lenguaje de primer orden L_1. De acuerdo con la definición de validez lógica, α es lógicamente válida si y sólo si es verdadera en todas las estructuras para L_1. Si ahora L_2 es un lenguaje cuyos símbolos propios son los de L_1 y otros más, α es también una sentencia de L_2. Como sentencia de L_2, α será lógicamente válida si y sólo si es verdadera en todas las estructuras para L_2. Puesto que las estructuras para L_1 y las estructuras para L_2 no son las mismas, la definición de verdad lógica parece depender de qué lenguaje consideremos. Lo mismo ocurre con la relación de consecuencia. Ahora bien, con ayuda del lema de coincidencia podemos ver que esta dependencia del lenguaje es sólo aparente.

Supongamos que L_1 y L_2 son lenguajes de primer orden tales que todo símbolo propio de L_1 es también un símbolo propio de L_2. Si $\mathcal{A}_2$ es una estructura para L_2, la **restricción** de $\mathcal{A}_2$ al lenguaje L_1 es, por definición, la estructura $\mathcal{A}_1$ para L_1 con el mismo universo que $\mathcal{A}_2$ y tal que, para cada símbolo propio s de L_1, $s^{\mathcal{A}_1} = s^{\mathcal{A}_2}$. Si $\mathcal{A}_1$ es la restricción de $\mathcal{A}_2$ a L_1, decimos que $\mathcal{A}_2$ es una **expansión** de $\mathcal{A}_1$ a L_2.

Proposición 17.1. *Supongamos que L_1 y L_2 son lenguajes de primer orden tales que todo símbolo propio de L_1 es también un símbolo propio de L_2. Sea $\mathcal{A}_2$ una estructura para L_2 y sea $\mathcal{A}_1$ la restricción de $\mathcal{A}_2$ a L_1. En esta situación, para todo término cerrado t y toda sentencia σ de L_1,*

$$t^{\mathcal{A}_1} = t^{\mathcal{A}_2} \quad y \quad \mathcal{A}_1 \models \sigma \text{ sii } \mathcal{A}_2 \models \sigma.$$

La demostración de esta proposición es esencialmente la misma que la del lema de coincidencia.

Lema 17.2. *Si L_1 y L_2 son lenguajes de primer orden tales que todo símbolo propio de L_1 es también un símbolo propio de L_2, entonces toda estructura $\mathcal{A}_1$ para L_1 posee una expansión al lenguaje L_2.*

Demostración. Si $\mathcal{A}_1$ es una estructura para L_1, definimos la estructura $\mathcal{A}_2$ para L_2 como sigue. El universo de $\mathcal{A}_2$ es el mismo que el de $\mathcal{A}_1$, si s es un símbolo propio de L_1, $s^{\mathcal{A}_2} = s^{\mathcal{A}_1}$; si, finalmente, s es un símbolo propio de

L_2 pero no de L_1, consideramos tres casos, según s sea un símbolo relacional, un símbolo funcional o una constante individual. Si s es un símbolo relacional n-ario, interpretamos s como la relación n-aria vacía, es decir, $s^{\mathcal{A}_2} = \emptyset$ (en particular, puesto que un símbolo de predicado no es más que un símbolo relacional unario, interpretamos los símbolos de predicado de L_2 que no están en L_1 como el conjunto vacío); si s es un símbolo funcional n-ario, elegimos un objeto cualquiera a del universo de $\mathcal{A}_2$ e interpretamos s como la operación n-aria constante a, es decir, para todo n-tuplo $\langle x_1, \dots x_n \rangle$ de elementos de A_2, $s^{\mathcal{A}_2}(x_1, \dots, x_n) = a$; si s es una contante individual, elegimos también $a \in A_2$ e interpretamos s como a, es decir, $s^{\mathcal{A}_2} = a$. Es claro que $\mathcal{A}_2$ es una expansión de $\mathcal{A}_1$ al lenguaje L_2. □

Podemos mostrar ya con todo detalle que si todo símbolo propio de L_1 es un símbolo propio de L_2, una sentencia es verdadera en toda estructura para L_1 si y sólo si es verdadera en toda estructura para L_2. Supongamos que α es una sentencia de L_1 verdadera en toda estructura para L_1 y sea $\mathcal{A}_2$ una estructura para L_2. Sea $\mathcal{A}_1$ la restricción de $\mathcal{A}_2$ a L_1. Puesto que $\mathcal{A}_1$ es una estructura para L_1, α es verdadera en $\mathcal{A}_1$; pero entonces, por la proposición 17.1, α es verdadera en $\mathcal{A}_2$. Supongamos ahora, inversamente, que α es verdadera en toda estructura para L_2 y sea $\mathcal{A}_1$ una estructura para L_1. Por el lema 17.2, $\mathcal{A}_1$ posee una expansión, $\mathcal{A}_2$, al lenguaje L_2. Puesto que $\mathcal{A}_2$ es una estructura para L_2, α es verdadera en $\mathcal{A}_2$; pero entonces, por la proposición 17.1, α es verdadera en $\mathcal{A}_1$.

Hemos justificado que la validez lógica de una sentencia no depende del lenguaje considerado. Lo mismo vale, y con el mismo razonamiento, para la relación de consecuencia; es decir, si L_1 y L_2 son como antes, Σ es un conjunto de sentencias de L_1 y α es una sentencia de L_1, α es verdadera en todas las estructuras para L_1 que son modelos de Σ si y sólo si es verdadera en todos los modelos de Σ que son estructuras para L_2. Por consiguiente, cuando nos preguntemos si una sentencia es lógicamente válida o si es consecuencia de un cierto conjunto de sentencias, no hará falta que especifiquemos qué lenguaje concreto consideramos: cualquier lenguaje que contenga los símbolos propios que aparecen en las sentencias en cuestión dará los mismos resultados.

2. El teorema de corrección

Para evitar repeticiones innecesarias fijamos un lenguaje de primer orden L numerable, es decir, con un conjunto numerable de símbolos. Salvo indicación expresa de lo contrario, supondremos que todas las fórmulas y todos los términos considerados son fórmulas y términos de L. Recordemos que un secuente $\langle \Sigma, \alpha \rangle$ es correcto si y sólo si $\Sigma \models \alpha$.

PROPOSICIÓN 17.3. *Si cada uno de los secuentes a que se aplica una regla del cálculo es correcto, el secuente obtenido también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Basta analizar cada una de las reglas. Véanse, en particular, las proposiciones 11.1, 15.1 y 15.2. □

Dos de las reglas de obtención de secuentes, [EI] y [R$_\approx$], carecen de secuentes superiores, es decir, no se aplican a ningún secuente. Digamos que un *secuente básico* es un secuente de la forma $\langle \Sigma, \alpha \rangle$, donde $\alpha \in \Sigma$, o de la forma $\langle \Sigma, t \approx t \rangle$, donde t es un término cerrado. Así, un secuente básico es el secuente inferior de una regla sin secuentes superiores. Parte del contenido de la proposición anterior es que todo secuente básico es correcto.

PROPOSICIÓN 17.4. *Todo secuente derivable es correcto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S un secuente derivable. Esto significa que S es el último secuente de una derivación, es decir, de una sucesión finita de secuentes cada uno de los cuales es o bien un secuente básico o bien se obtiene de uno o más secuentes anteriores mediante la aplicación de una regla del cálculo. Fijemos, pues, una derivación

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

donde S_n es S. Mostraremos por inducción que todos los secuentes que aparecen en la derivación son correctos (por lo que también lo será S). El primer secuente, S_1, debe ser un secuente básico y es, por tanto, correcto. Sea ahora $1 < k \leq n$ y supongamos que todos los secuentes $(S_1, \dots, S_{k-1})$ que aparecen antes de S_k son correctos. Debemos concluir que S_k también lo es. Si S_k es básico, es ciertamentre correcto. Si no es básico, S_k se obtiene mediante una regla a partir de uno o más secuentes anteriores, que, por hipótesis inductiva, son correctos. Así, por la proposición anterior, S_k es también correcto. □

TEOREMA 17.5. (DE CORRECCIÓN, PRIMERA FORMA) *Toda sentencia deducible de un conjunto de sentencias es consecuencia lógica de este conjunto. En otras palabras, si Σ es un conjunto de sentencias y α es una sentencia,*

$$si\ \Sigma \vdash \alpha,\ entonces\ \Sigma \models \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\Sigma \vdash \alpha$. Así, hay $\Gamma \subseteq \Sigma$ tal que el secuente $\langle \Gamma, \alpha \rangle$ es derivable y, por tanto, correcto, de modo que $\Gamma \models \alpha$. Pero entonces $\Sigma \models \alpha$, ya que $\Gamma \subseteq \Sigma$. □

COROLARIO 17.6. *Toda sentencia deducible sin premisas es lógicamente válida. Es decir, para toda sentencia α,*

$$si\ \vdash \alpha,\ entonces\ \models \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Es un caso particular de la proposición anterior. □

Decimos que un conjunto Σ de sentencias es **inconsistente** si hay una sentencia α tal que $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \neg\alpha$ y decimos que es **consistente** si no es inconsistente. Es claro que si un conjunto Σ de sentencias posee un subconjunto inconsistente, Σ es también inconsistente, pues toda sentencia deducible de un subconjunto de Σ es deducible de Σ.

TEOREMA 17.7. (DE CORRECCIÓN, SEGUNDA FORMA) *Todo conjunto satisfacible de sentencias es consistente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Σ un conjunto satisfacible de sentencias. Si Σ fuera inconsistente, habría una sentencia α tal que tanto ella como su negación serían deducibles de Σ. Por la primera forma del teorema de corrección, tanto α como su negación serían consecuencia de Σ. Pero esto sólo es posible si Σ es insatisfacible. Así, Σ debe ser consistente. □

LEMA 17.8. *Si Σ es inconsistente, hay un subconjunto finito de Σ que es ya inconsistente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Σ es inconsistente. Hay, pues, una sentencia, α, tal que tanto ella como su negación son deducibles de Σ. Por definición de deducibilidad, hay subconjuntos finitos, Γ_1 y Γ_2, de Σ tales que los secuentes $\langle\Gamma_1,\alpha\rangle$ y $\langle\Gamma_2,\neg\alpha\rangle$ son derivables. Sea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Γ es un subconjunto finito de Σ y, por la regla [E2], los secuentes $\langle\Gamma,\alpha\rangle$ y $\langle\Gamma,\neg\alpha\rangle$ son derivables, de modo que $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Γ es, pues, un subconjunto finito e inconsistente de Σ. □

LEMA 17.9. *Σ es inconsistente sii toda sentencia es deducible de Σ.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si toda sentencia es deducible de Σ y α es una sentencia cualquiera, entonces $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \neg\alpha$, por lo que Σ es inconsistente.

Justifiquemos ahora el condicional inverso. Supongamos que Σ es inconsistente. Hemos de mostrar que si β es una sentencia cualquiera, $\Sigma \vdash \beta$. Si razonamos como en el lema anterior, vemos que existe $\Gamma \subseteq \Sigma$, finito, tal que los secuentes $\langle\Gamma,\alpha\rangle$ y $\langle\Gamma,\neg\alpha\rangle$ son derivables. Pero entonces, por la regla derivada [CD], el secuente $\langle\Gamma,\beta\rangle$ es derivable. Así, puesto que $\Gamma \subseteq \Sigma$, $\Sigma \vdash \beta$. □

LEMA 17.10.

(1) $\Sigma \vdash \alpha$ *sii* $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ *es inconsistente.*

(2) $\Sigma \vdash \neg\alpha$ *sii* $\Sigma \cup \{\alpha\}$ *es inconsistente.*

DEMOSTRACIÓN. Justificamos sólo (1), dejando (2) como ejercicio. Si $\Sigma \vdash \alpha$, entonces $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$. Por otro lado es claro que $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$. Así, si $\Sigma \vdash \alpha$, $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente.

Inversamente, si $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente, entonces (por el lema 17.9) toda sentencia es deducible de $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$, en particular, α y $\neg\alpha$ lo son, de modo que, por la regla $[E_\neg]$ y la proposición 16.2, $\Sigma \vdash \alpha$. □

COROLARIO 17.11. *Si Σ es consistente y α es una sentencia cualquiera, entonces $\Sigma \cup \{\alpha\}$ o $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es consistente.*

DEMOSTRACIÓN. Se obtiene fácilmente con ayuda del lema anterior. □

3. Conjuntos consistentes maximales

Un conjunto de sentencias Σ es **consistente maximal** sii (1) Σ es consistente y (2) para toda sentencia α, si $\alpha \notin \Sigma$, $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

LEMA 17.12. *Si Σ es consistente maximal y $\Sigma \vdash \alpha$, entonces $\alpha \in \Sigma$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Σ es consistente maximal y $\Sigma \vdash \alpha$. Si $\alpha \notin \Sigma$, entonces $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente, pues Σ es consistente maximal. Por el lema 17.10, $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Pero esto es imposible, ya que Σ es consistente y $\Sigma \vdash \alpha$. □

LEMA 17.13. *Si Σ es consistente, Σ es consistente maximal sii para toda sentencia α, $\alpha \in \Sigma$ o $\neg\alpha \in \Sigma$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Σ consistente maximal y sea α una sentencia cualquiera. Por el corolario 17.11, uno de los conjuntos $\Sigma \cup \{\alpha\}$ y $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es consistente. Pero entonces, por la definición de consistencia maximal, en el primer caso $\alpha \in \Sigma$ y en el segundo $\neg\alpha \in \Sigma$.

Supongamos ahora que Σ es consistente y que toda sentencia o su negación pertenece a Σ. Debemos mostrar que Σ cumple la segunda cláusula de la definición de consistencia maximal. Sea, pues, α una sentencia tal que $\alpha \notin \Sigma$. Por nuestra suposición, $\neg\alpha \in \Sigma$ y, así, $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Pero entonces, por (2) del lema 17.10, $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente. □

TEOREMA 17.14. *Si Σ es un conjunto consistente maximal, entonces para todo par de sentencias α y β,*

(1) $\neg\alpha \in \Sigma$ *sii* $\alpha \notin \Sigma$,
(2) $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$ *sii* $\alpha \in \Sigma$ *y* $\beta \in \Sigma$,
(3) $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$ *sii* $\alpha \in \Sigma$ *o* $\beta \in \Sigma$,
(4) $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Sigma$ *sii* $\alpha \notin \Sigma$ *o* $\beta \in \Sigma$,
(5) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in \Sigma$ *sii* $\alpha \in \Sigma$ *y* $\beta \in \Sigma$, *o*, $\alpha \notin \Sigma$ *y* $\beta \notin \Sigma$.

DEMOSTRACIÓN. La cláusula (1) se obtiene del lema 17.13 y de la consistencia de Σ. En cuanto a (2), por el lema 17.12 basta mostrar que para cada par de sentencias α y β,

$$\Sigma \vdash (\alpha \wedge \beta) \text{ sii } \Sigma \vdash \alpha \text{ y } \Sigma \vdash \beta,$$

lo cual se justifica fácilmente con ayuda de las reglas $[I_\wedge]$ y $[E_\wedge]$. Pasemos a la justificación de (3). Si $\alpha \in \Sigma$ o $\beta \in \Sigma$ entonces, por reglas [E1] y $[I_\vee]$ y la proposición 16.2, $\Sigma \vdash (\alpha \vee \beta)$, de modo que, por el lema 17.12, $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$. Inversamente, supongamos que $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$. Debemos ver que $\alpha \in \Sigma$ o $\beta \in \Sigma$. Ahora bien, si $\alpha \notin \Sigma$, entonces, por (1) de este teorema, $\neg\alpha \in \Sigma$, de modo que $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Por otra parte, $\Sigma \vdash (\alpha \vee \beta)$ (puesto que $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$). Así, por la regla derivada [ED] y la proposición 16.2, $\Sigma \vdash \beta$. Por el lema 17.12 nuevamente, $\beta \in \Sigma$. Dejamos la justificación de las cláusulas (4) y (5) como ejercicio. □

TEOREMA 17.15. *Todo conjunto consistente de sentencias es extensible a un conjunto consistente maximal. Con mayor precisión, para todo conjunto consistente Σ de sentencias de un lenguaje numerable de primer orden hay un conjunto consistente maximal Σ^* de sentencias del mismo lenguaje tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Σ un conjunto consistente de sentencias (de un lenguaje numerable L). Puesto que el conjunto de símbolos es numerable, también lo es, por la proposición 5.30, el conjunto de todas las sentencias. Fijemos una enumeración $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de todas las sentencias de L (es decir, fijemos una función g de $\mathbb{N}$ sobre el conjunto de todas las sentencias y sea $\alpha_n = g(n)$). Describiremos cómo obtener una sucesion infinita $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \ldots$ de conjuntos consistentes.

(a) $\Sigma_0 = \Sigma$. Por suposición, Σ_0 es consistente.
(b) Si $n \geq 0$ y ya hemos obtenido el conjunto consistente Σ_n, consideramos la sentencia α_n y definimos

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{si } \Sigma_n \cup \{\alpha_n\} \text{ es consistente,} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{si } \Sigma_n \cup \{\alpha_n\} \text{ no es consistente.} \end{cases}$$

Por el corolario 17.11, uno de los conjuntos $\Sigma_n \cup \{\alpha_n\}$ o $\Sigma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ es consistente, por lo que Σ_{n+1} es consistente.

Así concluye la definición de la sucesión que, como vemos sin dificultad, cumple las cuatro condiciones siguientes:

(1) cada Σ_n es consistente,
(2) $\Sigma_0 = \Sigma$,
(3) para cada n, $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$,
(4) para cada n, $\alpha_n \in \Sigma_{n+1}$ o $\neg\alpha_n \in \Sigma_{n+1}$.

Definimos finalmente

$$\Sigma^* = \bigcup\{\Sigma_n : n \in \mathbb{N}\};$$

en palabras, Σ^* es el conjunto de todas las sentencias que pertenecen a algún conjunto Σ_n.

Verifiquemos que Σ^* es el conjunto buscado. En primer lugar, $\Sigma \subseteq \Sigma^*$, por (2). Además, Σ es consistente, ya que si no lo fuera, entonces, por el lema 17.8, existiría un conjunto Γ finito e inconsistente tal que $\Gamma \subseteq \Sigma^*$. Por ser Γ finito, debería, por (3), existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma \subseteq \Sigma_n$, de modo que Σ_n sería inconsistente, en contradicción con (1). Nos queda por verificar que Σ^* es consistente maximal. Ahora bien, por (4) y por ser $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ una enumeración de todas las sentencias de L, para toda sentencia α de L, $\alpha \in \Sigma^*$ o $\neg\alpha \in \Sigma^*$. Así, por el lema 17.13, Σ^* es consistente maximal. □

4. Teorías de Henkin y modelos canónicos

Una **teoría** en un lenguaje de primer orden L es un conjunto T de sentencias de L tal que toda sentencia de L deducible de T también pertenece a T; es decir, para toda sentencia α de L,

$$\text{si } T \vdash \alpha, \text{ entonces } \alpha \in T.$$

Una teoría es **completa** sii para toda sentencia α de L, $\alpha \in T$ o $\neg\alpha \in T$.

OBSERVACIONES

1. Si T es una teoría en un lenguaje L y α es una sentencia de L deducible sin premisas (es decir, $\vdash \alpha$), entonces $\alpha \in T$.
2. Según el lema 17.9, toda sentencia es deducible de cualquier conjunto inconsistente de sentencias. En consecuencia, hay exactamente una teoría inconsistente en lenguaje L, a saber, el conjunto de todas las sentencias de L.
3. Todo conjunto consistente maximal de sentencias de un lenguaje de primer orden es una teoría completa. Inversamente, toda teoría consistente y completa es un conjunto consistente maximal de sentencias

del lenguaje considerado. (La justificación de estos asertos se halla en los lemas 17.12 y 17.13.)

Si $\mathcal{A}$ es una estructura para un lenguaje L, la **teoría de la estructura** $\mathcal{A}$, en símbolos, $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, es el conjunto de todas las sentencias de L verdaderas en $\mathcal{A}$; es decir para toda sentencia α de L,

$$\alpha \in \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \text{ sii } \mathcal{A} \models \alpha.$$

PROPOSICIÓN 17.16. *$\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ es una teoría consistente y completa de la cual $\mathcal{A}$ es un modelo.*

Dejamos la demostración de esta proposición como ejercicio.

LEMA 17.17. *Si T es una teoría en un lenguaje de primer orden L, entonces*

(1) $t \approx t \in T$,
(2) *si* $t \approx s \in T$, *entonces* $s \approx t \in T$,
(3) *si* $t_1 \approx t_2 \in T$ *y* $t_2 \approx t_3 \in T$, *entonces* $t_1 \approx t_3 \in T$,
(4) *si* $t_1 \approx s_1 \in T, \ldots, t_n \approx s_n \in T$ *y* $Rt_1 \ldots t_n \in T$, *entonces* $Rs_1 \ldots s_n \in T$,
(5) *si* $t \approx s \in T, t_1 \approx s_1 \in T, \ldots, t_n \approx s_n \in T$ *y* $ft_1 \ldots t_n \approx t \in T$, *entonces* $fs_1 \ldots s_n \approx s \in T$.
(6) $\exists v t \approx v \in T$ (*en particular,* $\exists v f t_1 \ldots t_n \approx v \in T$),

donde $t, t_1, \ldots, t_n, s, s_1, \ldots s_n$ son términos cerrados de L, f es un símbolo funcional n-ario de L, R es un símbolo relacional n-ario de L y φ es una fórmula de L con una única variable libre, v.

DEMOSTRACIÓN. Usamos simplemente que (i) toda sentencia de L deducible sin premisas pertenece a T y (ii) toda sentencia deducible de T pertenece a T. Detengámonos, por ejemplo, en (4). La sentencia

$$(t_1 \approx s_1 \wedge \ldots \wedge t_n \approx s_n \wedge Rt_1 \ldots t_n) \to Rs_1 \ldots s_n$$

es deducible sin premisas y, por tanto, pertenece a T. Así, si $t_1 \approx s_1 \in T, \ldots, t_n \approx s_n \in T$ y $Rt_1 \ldots t_n \in T$, entonces $T \vdash Rs_1 \ldots s_n$ y, por tanto $Rs_1 \ldots s_n \in T$. □

Sea C un conjunto de constantes individuales de un lenguaje de primer orden L. Sean también T una teoría y $\mathcal{A}$ una estructura para L. Decimos que

(1) $\mathcal{A}$ es una **estructura canónica** con respecto a C si todo elemento de A, el universo de $\mathcal{A}$, es el valor de una constante en C, es decir, si

$$A = \{c^{\mathcal{A}} : c \in C\}.$$

(2) T es un **teoría de Henkin** con respecto a C si T es consistente y para toda fórmula φ de L, con la única variable libre v, hay una constante c en C tal que la sentencia

$$\exists v\varphi \to \varphi(^v_c)$$

pertenece a T.

LEMA 17.18. *Si $\mathcal{A}$ es una estructura canónica con respecto al conjunto de constantes C y φ es una fórmula con la única variable libre v,*

(1) $\mathcal{A} \models \exists v\varphi$ *sii hay c en C tal que* $\mathcal{A} \models \varphi(^v_c)$,
(2) $\mathcal{A} \models \forall v\varphi$ *sii para todo c en C,* $\mathcal{A} \models \varphi(^v_c)$.

Dejamos la demostración de este lema como ejercicio.

LEMA 17.19. *Si T es una teoría completa de Henkin con respecto al conjunto de constantes C, entonces para toda fórmula φ con la única variable libre v,*

(1) $\exists v\varphi \in T$ *sii hay c en C tal que* $\varphi(^v_c) \in T$,
(2) $\forall v\varphi \in T$ *sii para todo c en C,* $\varphi(^v_c) \in T$.

Dejamos la demostración de este lema como ejercicio.

PROPOSICIÓN 17.20. *La teoría de una estructura canónica con respecto a un conjunto de constantes C es una teoría de Henkin con respecto a C.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{A}$ un estructura canónica con respecto al conjunto de constantes C y sea T la teoría de $\mathcal{A}$. Por la proposición 17.16 sabemos que T es consistente y completa. Sea φ una fórmula con una única variable libre, v. Debemos ver que hay por lo menos una constante c en C tal que el condicional $\exists v\varphi \to \varphi(^v_c)$ pertenece a T, es decir, tal que

$$\mathcal{A} \models \exists v\varphi \to \varphi(^v_c).$$

Ahora bien, si $\mathcal{A} \not\models \exists v\varphi$, entonces $\mathcal{A} \models \neg\exists v\varphi$, de modo que, para cualquier sentencia β, $\mathcal{A} \models \exists v\varphi \to \beta$. En particular, para cualquier constante c,

$$\mathcal{A} \models \exists v\varphi \to \varphi(^v_c).$$

Si, por el contrario, $\mathcal{A} \models \exists v\varphi$, sea a un elemento de A tal que $\mathcal{A} \models \varphi[^v_a]$. Puesto que $\mathcal{A}$ es canónica, hay c en C tal que $a = c^{\mathcal{A}}$. Así, por el lema de sustitución, $\mathcal{A} \models \varphi(^v_c)$. Por tanto,

$$\mathcal{A} \models \exists v\varphi \to \varphi(^v_c).$$

Así, en cualquier caso (tanto si $\mathcal{A}$ es un modelo de $\exists v\varphi$ como si no), hay una constante c en C tal que $\mathcal{A} \models \exists v\varphi \to \varphi(^{v}_{c})$. □

Pasamos a mostrar ahora que, inversamente, toda teoría completa de Henkin es la teoría de una estructra canónica o, lo que es lo mismo, posee un modelo canónico (es decir, un modelo que es una estructura canónica).

Construcción de un modelo canónico

Sea L un lenguaje numerable y sea C un conjunto de constantes individuales de L (L puede tener otras constantes individuales además de las de C). Sea también T una teoría en el lenguaje L, completa y de Henkin con respecto a C. Nuestra intención es definir una estructura canónica con respecto a C y mostrar que es un modelo de T.

En primer lugar, definimos la relación binaria $\sim$ en en el conjunto C por:

(17.1) $$c \sim d \text{ sii } c \approx d \in T.$$

Por (1), (2) y (3) del lema 17.17, $\sim$ es una relación de equivalencia en C.

Para cada constante $c \in C$, sea $\tilde{c}$ la clase de equivalencia de c con respecto a la relación $\sim$; o sea,

(17.2) $$\tilde{c} = \{d \in C : c \sim d\},$$

de modo que si c y d son constantes en C,

(17.3) $$\tilde{c} = \tilde{d} \text{ sii } c \approx d \in T.$$

Sea ahora A el conjunto cociente de C con respecto a $\sim$, es decir, el conjunto de todas las clases de equivalencia de C con respecto a $\sim$:

(17.4) $$A = \{\tilde{c} : c \in C\}.$$

Vamos a definir una estructura, $\mathcal{A}$, con universo A. Para ello debemos definir las interpretaciones en $\mathcal{A}$ de los símbolos relacionales, de los símbolos funcionales y de las constantes individuales de L.

Si R es un símbolo relacional n-ario, definimos la relación n-aria $R^{\mathcal{A}}$ en A del siguiente modo: para cualesquiera $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n \in A$,

(17.5)
$$\langle \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n \rangle \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{sii} \quad \text{hay } d_1, \ldots, d_n \in C \text{ tales que } \tilde{c}_1 = \tilde{d}_1, \ldots, \tilde{c}_n = \tilde{d}_n \text{ y } Rd_1 \ldots d_n \in T.$$

Veamos que

(17.6) $$\langle \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n \rangle \in R^{\mathcal{A}} \text{ sii } Rc_1 \ldots c_n \in T.$$

Por un lado, es claro que si $Rc_1 \ldots c_n \in T$, entonces $\langle \tilde{c}_1, \ldots \tilde{c}_n \rangle \in R^{\mathcal{A}}$. Por otro lado, si $\langle \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n \rangle \in R^{\mathcal{A}}$, hay constantes $d_1, \ldots, d_n \in C$ tales que $\tilde{c}_1 = \tilde{d}_1, \ldots, \tilde{c}_n = \tilde{d}_n$ y $Rd_1 \ldots d_n \in T$; así, por la definición (17.1), $c_1 \approx d_1 \in T, \ldots, c_n \approx d_n \in T$ y $Rd_1 \ldots d_n \in T$. Pero entonces, por (4) del lema 17.17, $Rc_1 \ldots c_n \in T$. Esto justifica (17.6).

Sea ahora f un símbolo funcional n-ario de L. Si $c_1, \ldots, c_n \in C$, entonces, por (6) del lema 17.17,

$$\exists v f c_1 \ldots c_n \approx v \in T.$$

Así, por (1) del lema 17.19, hay una constante c en C tal que $fc_1 \ldots c_n \approx c \in T$, es decir, tal que $fc_1 \ldots c_n \sim c$. Si $d_1, \ldots, d_n$ y d son constantes en C tales que $c_1 \sim d_1, \ldots, c_n \sim d_n$ y $fd_1 \ldots d_n \approx d \in T$, entonces por (5) del lema 17.17, $c \approx d \in T$, es decir, $c \sim d$. Por tanto, podemos definir $f^{\mathcal{A}}$ por:

(17.7) $$f^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1 \ldots \tilde{c}_n) = \tilde{c} \text{ sii } fc_1 \ldots c_n \approx c \in T.$$

Finalmente, si d es una constante individual de L (posiblemente, pero no necesariamente, $d \in C$), entonces, por (6) del lema 17.17,

$$\exists v d \approx v \in T.$$

Por consiguiente, por (1) del lema 17.19, hay una constante c en C tal que

$$d \approx c \in T.$$

Naturalmente, si c' es otra constante tal que $d \approx c' \in T$, entonces (por (2) y (3) del lema 17.17) $c \approx c' \in T$. Así, podemos definir

(17.8) $$d^{\mathcal{A}} = \tilde{c} \text{ sii } d \approx c \in T.$$

En particular, por (1) del lema 17.17, si $c \in C$,

(17.9) $$c^{\mathcal{A}} = \tilde{c}.$$

Con esto concluye la definición de la estructura $\mathcal{A}$. Por 17.9 y la definición de A, $\mathcal{A}$ es canónica con respecto a C. Mostraremos ahora que es un modelo de T.

Lema 17.21. *Si t es un término cerrado de L y c es una constante individual de C, entonces*

$$t^{\mathcal{A}} = \tilde{c} \text{ sii } t \approx c \in T.$$

Demostración. Razonamos por inducción sobre la longitud (el número de símbolos) de los términos cerrados. Así, mostramos que (i) el lema se cumple

para las constantes individuales (los términos cerrados simples, de longitud 1) y (ii) si el lema se cumple para todos los términos cerrados de longitud menor que un término cerrado compuesto (es decir, un término de la forma $ft_1 \dots t_n$), también se cumple para el término en cuestión. Ahora bien, por (17.8), el lema se cumple para las constantes individuales, por lo que pasamos a ocuparnos de los términos compuestos.

Sea t el término cerrado $ft_1 \dots t_n$ y supongamos que el lema se cumple para todo término cerrado de longitud menor que t; en particular, para cada uno de los términos $t_1, \dots t_n$. Sean $c_1, \dots, c_n$ constantes individuales tales que

$$t_1^{\mathcal{A}} = \widetilde{c}_1, \dots, t_n^{\mathcal{A}} = \widetilde{c}_n$$

(tales constantes existen, ya que el valor de un término cerrado es un elemento de A y $A = C/\sim$). Puesto que el lema se cumple para $t_1, \dots, t_n$,

(17.10) $$t_1 \approx c_1 \in T, \dots, t_n \approx c_n \in T.$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{A}} = \widetilde{c} \text{ sii } & f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}}) = \widetilde{c}, \\ \text{sii } & f^{\mathcal{A}}(\widetilde{c}_1, \dots \widetilde{c}_n) = \widetilde{c}, \\ \text{sii } & fc_1 \dots c_n \approx c \in T \quad \text{por (17.7)}, \\ \text{sii } & ft_1 \dots t_n \approx c \in T \quad \text{por (17.10) y (5) del lema 17.17}, \\ \text{sii } & t \approx c \in T. \end{aligned}$$

Así concluye la prueba del lema. □

LEMA 17.22. *Para toda sentencia* σ *de* L,

$$\mathcal{A} \models \sigma \text{ sii } \sigma \in T.$$

DEMOSTRACIÓN. Demostramos el lema por inducción sobre el número de conectivas y cuantificadores que aparecen en las sentencias. Para ello basta mostrar que el lema se cumple para las sentencias atómicas (sin conectivas ni cuantificadores) y que si se cumple para todas las sentencias con menor número de conectivas y cuantificadores que una sentencia no atómica, se cumple también para la sentencia en cuestión.

Sea σ una sentencia atómica. Así, σ es de la forma $t_1 \approx t_2$ o de la forma $Rt_1 \dots t_n$, donde $n \geq 1$, R es un símbolo relacional n-ario y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos cerrados.

Si σ es $t_1 \approx t_2$, sean c_1, c_2 constantes individuales en C tales que $t_1^{\mathcal{A}} = \widetilde{c}_1$ y $t_2^{\mathcal{A}} = \widetilde{c}_2$. Por el lema anterior, $t_1 \approx c_1 \in T$ y $t_2 \approx c_2 \in T$. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \sigma \text{ sii } & t_1^{\mathcal{A}} = t_2^{\mathcal{A}}, \\ \text{sii } & c_1^{\mathcal{A}} = c_2^{\mathcal{A}}, \\ \text{sii } & c_1 \approx c_2 \in T, \\ \text{sii } & \sigma \in T. \end{aligned}$$

Si σ es $Rt_1 \dots t_n$, sean $c_1, \dots c_n$ constantes individuales en C tales que $t_1^{\mathcal{A}} = \widetilde{c}_1, \dots, t_n^{\mathcal{A}} = \widetilde{c}_n$. Por el lema anterior, $t_1 \approx c_1 \in T, \dots, t_n \approx c_n \in T$. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \sigma \text{ sii } & \langle t_1^{\mathcal{A}}, \dots, t_n^{\mathcal{A}} \rangle \in R^{\mathcal{A}}, \\ \text{sii } & \langle \widetilde{c}_1, \dots, \widetilde{c}_n \rangle \in R^{\mathcal{A}}, \\ \text{sii } & Rc_1 \dots c_n \in T \quad \text{por (17.6)}, \\ \text{sii } & Rt_1 \dots t_n \in T \quad \text{por (4) del lema 17.17}, \\ \text{sii } & \sigma \in T. \end{aligned}$$

Sea ahora σ una sentencia no atómica. Así, σ es de la forma $\neg\alpha$ o $(\alpha \vee \beta)$ o $(\alpha \wedge \beta)$ o $(\alpha \to \beta)$ o $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ o $\exists v\alpha$ o $\forall v\alpha$. Puesto que una teoría completa es un conjunto consistente maximal de sentencias, la verdad del lema para las cinco primeras posibilidades se sigue del lema 17.14. Que el lema se cumple para las dos últimas, se sigue del lema 17.19. Desarrollamos con detalle un caso de cada tipo dejando los restantes como ejercicio.

Sea σ la sentencia $(\alpha \vee \beta)$. Puesto que el número de conectivas y cuantificadores es menor en α y en β que en σ, suponemos (hipótesis inductiva) que el lema vale para α y para β. Pero entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \sigma \text{ sii } & \mathcal{A} \models \alpha \text{ o } \mathcal{A} \models \beta, \\ \text{sii } & \alpha \in T \text{ o } \beta \in T \quad \text{por hipótesis inductiva}, \\ \text{sii } & (\alpha \vee \beta) \in T \quad \text{por (3) del teorema 17.14}, \\ \text{sii } & \sigma \in T. \end{aligned}$$

Supongamos, finalmente, que σ es la sentencia $\exists v\varphi$ y que (hipótesis inductiva) el lema se cumple para las sentencias con menor número de conectivas y cuantificadores que σ. En particular, si c es una constante individual cualquiera, el lema se cumple para la sentencia $\varphi(\substack{v \\ c})$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \sigma \text{ sii } & \text{hay } c \in C \text{ tal que } \mathcal{A} \models \varphi(\substack{v \\ c}) \quad \text{por (1) del lema 17.18}, \\ \text{sii } & \text{hay } c \in C \text{ tal que } \varphi(\substack{v \\ c}) \in T \quad \text{por hipótesis inductiva}, \\ \text{sii } & \exists v\varphi(\substack{v \\ c}) \in T \quad \text{por (1) del lema 17.19}, \\ \text{sii } & \sigma \in T. \end{aligned}$$

Así concluye la prueba del lema 17.22. □

Del lema 17.22 se sigue inmediatamente que $\mathcal{A}$ es un modelo de T. Hemos justificado, pues, el siguiente teorema.

TEOREMA 17.23. *Toda teoría completa de Henkin con respecto a un conjunto de constantes C posee un modelo canónico con respecto a C.*

5. El teorema de completud

Sabemos que todo conjunto satisfacible de sentencias de un lenguaje de primer orden es consistente. Nuestro objetivo inmediato es mostrar que, inversamente, todo conjunto consistente de sentencias es satisfacible, a partir de lo cual obtendremos sin dificultad que el cálculo deductivo es completo, es decir, que toda sentencia que es consecuencia de un conjunto de sentencias es también deducible del conjunto.

Para ver que todo conjunto consistente de sentencias es satisfacible, mostraremos en primer lugar que todo conjunto consistente de sentencias es extensible a una teoría de Henkin con respecto a un conjunto infinito de constantes nuevas. Una vez obtenido este resultado, alcanzaremos nuestro objetivo apelando a los teoremas 17.15 y 17.23.

LEMA 17.24. *Si Σ es un conjunto consistente de sentencias, φ es una fórmula con la única variable libre v y c es una constante individual que no aparece en ninguna sentencia de Σ ni en φ, entonces el conjunto de sentencias*

$$\Sigma \cup \{\exists v\varphi \rightarrow \varphi(^{v}_{c})\}$$

es también consistente.

DEMOSTRACIÓN. Sea Σ consistente y supongamos, en busca de una contradicción, que $\Sigma \cup \{\exists v\varphi \rightarrow \varphi(^{v}_{c})\}$ es inconsistente. Así, por el lema 17.10,

$$\Sigma \vdash \neg(\exists v\varphi \rightarrow \varphi(^{v}_{c})).$$

Puesto que las sentencias $\exists v\varphi$ y $\neg\varphi(^{v}_{c})$ son deducibles de $\neg(\exists v\varphi \rightarrow \varphi(^{v}_{c}))$, concluimos que

(17.11) $$\Sigma \vdash \exists v\varphi$$

y

(17.12) $$\Sigma \vdash \neg\varphi(^{v}_{c}).$$

Puesto que c no aparece ni en Σ ni en $\neg\varphi$, por la regla $[\mathrm{I}_\forall]$ y la proposición 16.2 podemos concluir a partir de (17.12) que

$$\Sigma \vdash \forall v\neg\varphi.$$

Por otra parte, si aplicamos la regla derivada [CE] a (17.11), obtenemos

$$\Sigma \vdash \neg\forall v\neg\varphi.$$

Pero esto significa que Σ es inconsistente, en contradicción con nuestra suposición inicial. □

Sea L un lenguaje numerable y sea C un conjunto infinito numerable de constantes individuales que no pertenecen a L. Sea L^* el lenguaje de primer orden cuyos símbolos son los de L más las constantes de C. Puesto que la unión de dos conjuntos numerables es un conjunto numerable, el conjunto de los símbolos de L^* es numerable. Pero entonces, por la proposición 5.30, también lo es el conjunto de todas las fórmulas de L^* y, por tanto, el conjunto de las fórmulas de L^* con una única variable libre. Fijemos, pues, una enumerarción de las formulas de L^* con una única variable libre:

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

Fijamos también una enumeración de las constantes en C.

Sea c_0 la primera constante de C (en la enumeración fijada) que no aparece en φ_0 y sea ϑ_0 la sentencia de L^*:

(17.13) $$\vartheta_0 = \exists v\varphi_0 \rightarrow \varphi_0(^{v}_{c_0}),$$

donde v es la variable libre de φ_0.

Sea ahora $n > 0$ y supongamos definidas las sentencias $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}$. Sea c_n la primera constante de C que no aparece en $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}$ ni en φ_n. Definamos ϑ_n por

(17.14) $$\vartheta_n = \exists v\varphi_n \rightarrow \varphi_n(^{v}_{c_n}).$$

De este modo hemos descrito un procedimento para obtener las sentencias ϑ_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea H el conjunto de todas ellas:

(17.15) $$H = \{\vartheta_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

PROPOSICIÓN 17.25. *Si Σ es un conjunto consistente de sentencias de L, entonces el conjunto $\Sigma \cup H$ de sentencias de L^* es también consistente.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada número natural n, sea

$$H_n = \{\vartheta_k : k < n\}.$$

Mostramos por inducción que, para cada n en $\mathbb{N}$, el conjunto $\Sigma \cup H_n$ es consistente. Puesto que H_0 es vacío, $\Sigma \cup H_0 = \Sigma$, de modo que

$$\Sigma \cup H_0 \text{ es consistente.}$$

Sea ahora $n > 0$ y supongamos inductivamente que $\Sigma \cup H_n$ es consistente. Puesto que $H_{n+1} = H_n \cup \{\vartheta_n\}$, tenemos que

$$\Sigma \cup H_{n+1} = \Sigma \cup H_n \cup \{\exists v \varphi_n \to \varphi_n(^{v}_{c_n})\}.$$

Ahora bien, c_n no aparece ni en $\Sigma \cup H_n$ ni en φ_n. Así, por el lema 17.24, $\Sigma \cup H_{n+1}$ es consistente.

Sabiendo que cada conjunto $\Sigma \cup H_n$ es consistente, podemos concluir que $\Sigma \cup H$ también lo es. Pues supongamos, en busca de una contradicción, que $\Sigma \cup H$ es inconsistente. Por el lema 17.8, hay un subconjunto finito Γ de $\Sigma \cup H$ que es también inconsistente. Sea n el mayor número natural tal que la sentencia $\vartheta_n \in \Gamma$. Vemos que $\Gamma \subseteq \Sigma \cup H_{n+1}$. Pero esto es imposible, por ser $\Sigma \cup H_{n+1}$ consistente. □

TEOREMA 17.26. (DE COMPLETUD, PRIMERA FORMA) *Todo conjunto consistente de sentencias de un lenguaje numerable de primer orden L es satisfacible. De hecho, posee un modelo con universo numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea L un lenguaje numerable y sea Σ un conjunto consistente de sentencias de L. Sea C un conjunto infinito numerable de constantes individuales que no pertenecen a L y sea L^* el lenguaje cuyos símbolos son los de L más las constantes en C. Consideremos el conjunto H de sentencias de L^* introducido en (17.15). Por la proposición anterior, $\Sigma \cup H$ es un conjunto consistente de sentencias de L^*. Así, por el teorema 17.15, $\Sigma \cup H$ es extensible a un conjunto consistente maximal, es decir, a una teoría completa, T, en lenguaje L^*. Puesto que $H \subseteq T$, T es una teoría de Henkin con respecto a T. Por tanto, por el teorema 17.23, T tiene un modelo canónico, $\mathcal{A}$, con respecto a C. Puesto que $\Sigma \subseteq T$, $\mathcal{A}$ es también un modelo de Σ. Sea $\mathcal{A}'$ la restricción de $\mathcal{A}$ al lenguaje L. Por la proposición 17.1, para toda sentencia α de L, es decir, para toda sentencia que no contenga ninguna constante de C,

$$\mathcal{A} \models \alpha \text{ sii } \mathcal{A}' \models \alpha.$$

En consecuencia, por ser Σ un conjunto de sentencias de L,

$$\mathcal{A}' \models \Sigma.$$

Puesto que el universo de $\mathcal{A}'$ (que es el mismo que el de $\mathcal{A}$) es $C/\sim$ (ver (17.4)) y C es numerable, concluimos que $\mathcal{A}'$ tiene universo numerable. □

TEOREMA 17.27. (DE COMPLETUD, SEGUNDA FORMA) *Toda consecuencia lógica de un conjunto de sentencias es deducible de este conjunto. En otras palabras, para todo conjunto de sentencias Σ y toda sentencia α de un lenguaje de primer orden,*

$$si\ \Sigma \models \alpha,\ entonces\ \Sigma \vdash \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\Sigma \models \alpha$, $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible, de modo que, por el teorema anterior, $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente. Pero entonces, por el lema 17.10, $\Sigma \vdash \alpha$. □

COROLARIO 17.28. *Toda sentencia de primer orden lógicamente válida es deducible sin premisas. Es decir, para toda sentencia α,*

$$si\ \models \alpha,\ entonces\ \vdash \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Es un caso particular del teorema anterior. □

TEOREMA 17.29. (DE FINITUD PARA LA CONSECUENCIA) *Toda consecuencia lógica de un conjunto infinito de sentencias Σ es consecuencia de un subconjunto finito de Σ. En otras palabras, para toda sentencia α*

$$si\ \Sigma \models \alpha,\ hay\ un\ conjunto\ finito\ \Gamma \subseteq \Sigma\ tal\ que\ \Gamma \models \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\Sigma \models \alpha$, por el teorema 17.27, $\Sigma \vdash \alpha$, de modo que hay un subconjunto finito Γ de Σ tal que $\Gamma \vdash \alpha$. Pero entonces, por el teorema 17.5, $\Gamma \models \alpha$. □

TEOREMA 17.30. (DE LÖWENHEIM-SKOLEM) *Todo conjunto satisfacible de sentencias de un lenguaje numerable de primer orden posee un modelo con universo numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Σ un conjunto satisfacible de sentencias. Por el teorema 17.7, Σ es consistente. Así, por el teorema 17.26, Σ posee un modelo con universo numerable. □

TEOREMA 17.31. (DE COMPACIDAD) *Un conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden es satisfacible sii todos sus subconjuntos finitos lo son.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si un conjunto de sentencias es satisfacible, también lo son todos sus subconjuntos finitos. Supongamos ahora que Σ es un conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden todos cuyos subconjuntos finitos son satisfacibles. Así, por el teorema 17.7, todo subconjunto finito de Σ es consistente, de modo que, por el lema 17.8, también lo es Σ. Pero entonces, por el teorema 17.26, Σ es satisfacible. □

6. Aplicaciones

Para cada número natural $n \geq 2$, sea δ_n la sentencia que expresa «de modo natural» que hay por lo menos n objetos. Con más detalle, δ_n es la fórmula

$$\exists v_1 v_2 \ldots v_n \alpha,$$

donde α es la conjunción de todas las fórmulas $\neg v_i \approx v_j$, con $1 \leq i < j \leq n$. Así, δ_1 y δ_2 son

$$\delta_2 = \exists v_1 v_2 \neg v_1 \approx v_2,$$
$$\delta_3 = \exists v_1 v_2 v_3 (\neg v_1 \approx v_2 \wedge \neg v_1 \approx v_3 \wedge \neg v_2 \approx v_3).$$

Sea INF el conjunto de todas estas sentencias:

(17.16) $$\mathrm{INF} = \{\delta_n : n \geq 2\}.$$

Puesto que las sentencias δ_n no contienen símbolos propios de ningún lenguaje, INF es un conjunto de sentencias de todo lenguaje de primer orden.

LEMA 17.32. *Si $\mathcal{A}$ una estructura cualquiera con universo A,*

$$\mathcal{A} \models \mathrm{INF} \textit{ sii } A \textit{ es infinito.}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \geq 2$, la sentencia δ_n es verdadera en una estructura si y sólo si su universo tiene n o más elementos. Así, INF es satisfecho por todas las estructuras con universo infinito y sólo en ellas. □

Los modelos de INF son exactamente las estructuras con universo infinito. En contraposición, no hay ningún conjunto de sentencias de primer orden cuyos modelos sean precisamente las estructuras con universo finito. Este es el contenido de la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 17.33. *No hay ningún conjunto de sentencias Σ tal que para toda estructura $\mathcal{A}$,*

$$\mathcal{A} \models \Sigma \textit{ sii } A \textit{ es finito.}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, en busca de una contradicción, que Σ es un conjunto de sentencias tal. Puesto que todo subconjunto finito de INF posee un modelo finito, todo subconjunto finito del conjunto

$$\Sigma \cup \mathrm{INF}$$

es satisfacible. Así, por el teorema de compacidad, $\Sigma \cup \mathrm{INF}$ es satisfacible. Pero esto es absurdo, ya que si $\mathcal{A}$ un modelo de $\Sigma \cup \mathrm{INF}$, entonces A es finito, pues $\mathcal{A} \models \Sigma$, y A es infinito, pues $\mathcal{A} \models \mathrm{INF}$. □

El conjunto de sentencias INF es infinito. ¿Podemos hallar una única sentencia que cumpla su cometido, es decir, cuyos modelos sean precisamente las estructuras con universo infinito? Es fácil ver que no.

COROLARIO 17.34. *No hay ninguna sentencia σ tal que para toda estructura $\mathcal{A}$,*

$$\mathcal{A} \models \sigma \textit{ sii } A \textit{ es infinito.}$$

DEMOSTRACIÓN. Si σ fuera una sentencia tal, entonces, para toda estructura $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \neg\sigma \text{ sii } A \text{ es finito,}$$

en contradicción con la proposición anterior. □

PROPOSICIÓN 17.35. *Si Σ es un conjunto de sentencias de primer orden tal que, para todo número natural n, Σ tiene modelos con universo de n o más elementos, entonces Σ tiene un modelo con universo infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Σ un conjunto de sentencias tal. Puesto que, para todo n, Σ posee modelos con universo finito de n o más elementos, vemos que, para todo n, el conjunto de sentencias

$$\Sigma \cup \{\delta_2, \ldots, \delta_n\}$$

es satisfacible. Pero entonces todo subconjunto finito de $\Sigma \cup \mathrm{INF}$ es satisfacible. Sea, pues, $\mathcal{A}$ un modelo de $\Sigma \cup \mathrm{INF}$. Claramente, A es un modelo de Σ con universo infinito. □

El teorema de compacidad nos permite mostrar que es imposible caracterizar la estructura de los números naturales mediante un conjunto de sentencias de primer orden, como mostramos a continuación. Sea $\mathcal{N}$ la estructura

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, S^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}} \rangle.$$

Según la definición de teoría de una estructura, $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$, la teoría de $\mathcal{N}$, contiene todas las sentencias verdaderas en $\mathcal{N}$. Como veremos, todas estas sentencias son insuficientes para garantizar que 0, 1, 2, etc., son todos los números naturales, de lo que se sigue que el principio de inducción es inexpresable mediante una sentencia o un conjunto de sentencias de primer orden. Para formular el principio de inducción debemos recurrir a la teoría de conjuntos.

Sea c una constante individual. Consideremos las sentencias

$$\sigma_0 = 0 < c,$$
$$\sigma_1 = S0 < c,$$
$$\sigma_2 = SS0 < c,$$
$$\sigma_3 = SSS0 < c,$$
$$\ldots$$

y sea

$$\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \cup \{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Todo subconjunto finito de Σ es satisfacible, pues si Γ es un subconjunto finito de Σ, hay un número natural n_0 tal que si $\sigma_m \in \Gamma$, entonces $m < n_0$; pero entonces la estructura

$$\mathcal{N}^* = \langle \mathbb{N}, S^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, c^{\mathcal{N}^*} \rangle,$$

donde $c^{\mathcal{N}^*} = n_0$, es un modelo de Γ, como se verifica sin dificultad. Así, por el teorema de compacidad, Σ es satisfacible. Sea

$$\mathcal{A} = \langle A, S^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle$$

un modelo de Σ y sea

$$\mathcal{A}' = \langle A, S^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}} \rangle$$

la restricción de $\mathcal{A}$ al lenguaje original (sin la constante c). Por la proposición 17.1, $\mathcal{A}'$ es un modelo de $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$, por lo que en ella son verdaderas las mismas sentencias que en $\mathcal{N}$. Sin embargo, $\mathcal{A}'$ no es isomorfa a $\mathcal{N}$, pues si $a = c^{\mathcal{A}}$, entonces a es un elemento de A mayor (en el orden $<^{\mathcal{A}}$) que $0^{\mathcal{A}}$, que $(S0)^{\mathcal{A}}$, que $(SS0)^{\mathcal{A}}$, que $(SSS0)^{\mathcal{A}}$, etc., por lo que no puede corresponder mediante un isomorfismo a ningún número natural (ya que ningún número natural es mayor que 0, que 1, que 2, que 3, ...).

Los números reales forman un conjunto no numerable. Sea T la teoría de la estructura $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, <^{\mathcal{R}} \rangle$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales y $<^{\mathcal{R}}$ su orden natural. Por el teorema de Löwenheim-Skolem, T posee un modelo con universo numerable, que, por tanto, no es isomorfo a $\mathcal{R}$. Puesto que T contiene todas las sentencias de primer orden verdaderas en $\mathcal{R}$, concluimos que la estructura de los números reales con su orden no es caracterizable por ningún conjunto de sentencias de este lenguaje. Al igual que en el caso de los números naturales, para caracterizar el orden de los números reales debemos recurrir a la teoría de conjuntos, como esbozamos a continuación.

La propiedad fundamental del orden de los números reales es la continuidad. El orden $\mathcal{R}$ es **continuo**, es decir, es un orden lineal denso que cumple la siguiente condición: si X e Y son *subconjuntos* de $\mathbb{R}$ tales que 1) todo elemento de $\mathbb{R}$ pertenece a X o a Y y 2) todo elemento de X es menor que todo elemento de Y, entonces o bien X tiene elemento máximo o bien Y tiene elemento mínimo. Tomando en consideración que el orden de los números reales es isomorfo al orden de los puntos de una recta, podemos ofrecer una lectura geométrica de esta condición: todo «corte» de la recta está determinado por un punto. En efecto, X corresponde a la parte «inferior» o «izquierda» del corte, Y a la parte «superior» o «derecha». El elemento máximo de X o mínimo de Y corresponde al punto que determina el corte.

7. Teorías y axiomas

Como sabemos, una teoría en un lenguaje de primer orden L es un conjunto T de sentencias de L *cerrado con respecto a la relación de deducibilidad*, es decir, toda sentencia deducible de T también pertenece a T. Por los teoremas de corrección y de completud, una sentencia es deducible de un conjunto de sentencias si y sólo si es consecuencia del conjunto, por lo que una teoría es un conjunto de sentencias *cerrado con respecto a la relación de consecuencia*, es decir, toda sentencia que es consecuencia de T también pertenece a T. Nos referimos a las sentencias de una teoría T como a los **teoremas** de T.

Podemos obtener teorías a partir de estructuras. Según la proposición 17.16, el conjunto de todas las sentencias verdaderas en una estructura determinada es una teoría, la teoría de la estructura en cuestión. De este modo obtenemos, por ejemplo, la teoría del orden de los números naturales, la teoría del orden de los números enteros, o la teoría de la estructura de los números naturales con el orden, la suma y el producto, a la que solemos referirnos como la *teoría completa de números*.

No toda teoría es la teoría de una estructura. A menudo, en vez de ocuparnos de una sola estructura, nos interesamos en una variedad de estructuras con características comunes. Consideremos un ejemplo de esta situación de especial importancia para la lógica. Un *álgebra de conjuntos* sobre un conjunto U es una estructura

$$\mathcal{B} = \langle B, f^{\mathcal{B}}, g^{\mathcal{B}}, h^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}} \rangle,$$

donde B es un conjunto de subconjuntos de U tal que

1. $\emptyset \in B$ y $U \in B$,
2. si $X \in B$, entonces $\overline{X} \in B$,
3. si $X \in B$ y $Y \in \mathcal{B}$, entonces $X \cup Y \in B$ y $X \cap Y \in B$

y $f^{\mathcal{B}}$ es la operación de complemento con respecto a U, $g^{\mathcal{B}}$ y $h^{\mathcal{B}}$ son las operaciones de unión e intersección y $c^{\mathcal{B}}$ y $d^{\mathcal{B}}$ son el conjunto vacío y U, respectivamente. O sea, si $X, Y \in B$,

$$f^{\mathcal{B}}(X) = \overline{X},\ g^{\mathcal{B}}(X,Y) = X \cup Y,\ h^{\mathcal{B}}(X,Y) = X \cap Y,\ c^{\mathcal{B}} = \emptyset \ \text{ y } \ d^{\mathcal{B}} = U.$$

Un álgebra especial de conjuntos sobre U es la que tiene como universo $\mathcal{P}(U)$, el conjunto potencia de U. Hay muchas álgebras de conjuntos y podemos interesarnos no en un álgebra de conjuntos determinada, sino en lo que

es común a todas ellas. De esto se ocupa la *teoría de las álgebras de conjuntos* o *álgebra de Boole*; sus teoremas son las sentencias verdaderas en todas las álgebras de conjuntos. Podemos describir de forma general este modo de obtener una teoría a partir de una clase de estructuras.

Si $\mathcal{K}$ es una clase de estructuras para un mismo lenguaje, la **teoría de la clase** $\mathcal{K}$, en símbolos, $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$, es el conjunto de todas las sentencias verdaderas en todas las estructuras de $\mathcal{K}$. Así, para toda sentencia σ,

$$\sigma \in \mathrm{Th}(\mathcal{K}) \text{ sii para toda estructura } \mathcal{A} \in \mathcal{K}, \mathcal{A} \models \sigma.$$

El álgebra de Boole es, pues, la teoría de la clase de las álgebras de conjuntos.

Supongamos que T es una teoría y que Σ es un conjunto de teoremas de T tal que todo teorema de T es deducible (o, equivalentemente, es consecuencia) de Σ. Nos referimos a Σ como a un *conjunto de axiomas para* T. Observemos que en este sentido lógico de «axioma» no se exige que los axiomas sean evidentes, ni que sean verdaderos; lo único que se les exige es que de ellos se sigan todos los teoremas de la teoría. Observemos también que, dada una teoría T, cualquier teorema de T pertenecerá a algún conjunto de axiomas para T, por lo que no tiene sentido preguntarse si una sentencia determinada es o no es un axioma de T. Lo que sí tiene sentido es preguntarse si cierto conjunto de sentencias es un conjunto de axiomas para T. Repetimos la definición con todo detalle.

Si T es una teoría en un lenguaje L, un **conjunto de axiomas** para T es un conjunto Σ de sentencias de L tal que

$$T = \{\alpha : \alpha \text{ es una sentencia de } L \text{ y } \Sigma \vdash \alpha\}.$$

Sabemos cómo obtener teorías a partir de una estructura o, más generalmente, a partir de una clase de estructuras. Hay otro modo totalmente distinto y muy habitual de obtener una teoría: dando un conjunto de axiomas para ella. Lo hacemos presentando un conjunto de sentencias y declarando que la teoría es, por definición, el conjunto de todas sus consecuencias (o, equivalentemente, de las sentencias deducibles de él). Entre otras cosas, la siguiente proposición, cuya demostración dejamos como ejercicio, nos dice que de este modo obtenemos, efectivamente, una teoría.

PROPOSICIÓN 17.36. *Si Σ es un conjunto de sentencias de un lenguaje L y T es el conjunto de todas las sentencias de L deducibles de Σ, entonces*

(1) *T es una teoría,*

(2) *T es consistente si y sólo si Σ lo es,*

(3) *Σ es un conjunto de axiomas para T.*

Una diferencia clara entre este último procedimento de obtención de teorías y los dos anteriores es que, en aquéllos, el objeto de estudio de la teoría

está previamente determinado (es la estructura $\mathcal{A}$ o la clase de estructuras $\mathcal{K}$ a partir de la que obtenemos la teoría), mientras que en el *procedimiento axiomático* la teoría es previa a su objeto. La teoría se ocupa de sus modelos, es la teoría de la clase de sus modelos, pero ahora esta clase está determinada a partir de la teoría misma. De este modo obtenemos la *teoría de los órdenes lineales reflexivos*, cuyos axiomas son:

$\forall xRxx$,

$\forall xy((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x \approx y)$,

$\forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$,

$\forall xy(Rxy \vee Ryx)$.

El objeto de esta teoría lo constituyen los órdenes lineales reflexivos. Un orden lineal reflexivo es, por definición, un modelo de estos axiomas. Comparemos esta teoría con el álgebra de Boole o con la teoría completa de números. Hemos descrito estas dos teorías sin mencionar axioma alguno. Hemos dicho de qué se ocupan sin presentar ningún conjunto de axiomas. No así en el caso de los órdenes lineales reflexivos.

Otro ejemplo de teoría obtenida a partir de axiomas es la *teoría de las relaciones de equivalencia*. Sus axiomas son, naturalmente,

$\forall xRxx$,

$\forall xy(Rxy \rightarrow Ryx)$,

$\forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$.

Un ejemplo más es la *teoría de grupos*, formulada en un lenguaje con tres símbolos propios: un símbolo funcional binario (g), una símbolo funcional unario (h) y una constante individual (e). Los axiomas son:

$\forall xyz\, gxgyz \approx ggxyz$,

$\forall x\, gex \approx x$,

$\forall x\, ghxx \approx e$.

Estos axiomas suelen presentarse de modo menos formal, usando los símbolos «$\circ$» y «$^{-1}$» en vez de «g» y «h», respectivamente, y omitiendo los cuantificadores iniciales. En su presentación habitual son:

$x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z$,

$e \circ x \approx x$,

$x^{-1} \circ x \approx e$.

Un *grupo* es, por definición, un modelo de los axiomas de la teoría de grupos. Uno de estos modelos es la estructura

$$\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, g^{\mathbb{Z}}, h^{\mathbb{Z}}, e^{\mathbb{Z}} \rangle,$$

donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y para cualesquiera $n,m \in \mathbb{Z}$, $g^{\mathbb{Z}}(n,m) = n+m$, $h^{\mathbb{Z}}(n) = -n$ y $e^{\mathbb{Z}} = 0$. Hay una gran variedad de grupos muy distintos entre sí.

Si bien no toda teoría se obtiene a partir de axiomas, es a menudo conveniente hallar, si es posible, un conjunto de axiomas para la teoría de una estructura o de una clase de estructuras. Hallar un conjunto de axiomas para una teoría es *axiomatizarla*. El modo más satisfactorio de axiomatizar una teoría es ofrecer un conjunto finito y manejable de axiomas. Ahora bien, el conjunto de teoremas de una teoría es infinito, por lo que no podemos presuponer que la teoría tenga un conjunto finito de axiomas. Pero aunque una teoría determinada no tenga ningún conjunto finito de axiomas, es posible que posea un conjunto *efectivo* de axiomas; es decir, con cierta imprecisión, que haya un procedimiento mecánico que permita determinar en un número finito de pasos si una sentencia del lenguaje de la teoría pertenece o no al conjunto de axiomas en cuestión. Naturalmente, todo conjunto finito de axiomas es efectivo. Más adelante veremos algunos ejemplos de teorías que poseen un conjunto efectivo, pero infinito, de axiomas.

Decimos que una teoría es **finitamente axiomatizable** si posee un conjunto finito de axiomas. Así, la teoría de los órdenes lineales reflexivos es finitamente axiomatizable. También lo son la teoría de las relaciones de equivalencia y la teoría de grupos.

LEMA 17.37. *Toda teoría finitamente axiomatizable puede ser axiomatizada con un único axioma.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es un conjunto finito de axiomas para la teoría T, también lo es el conjunto unitario $\{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n\}$, ya que ambos poseen las mismas consecuencias. □

Que una teoría T sea finitamente axiomatizable no significa que todos los conjuntos de axiomas para T sean finitos. Obviamente, éste no es el caso (ya que T es un conjunto de axiomas para T). Ahora bien, de acuerdo con la siguiente proposición, si T es finitamente axiomatizable, siempre es posible extraer un conjunto finito de axiomas de cualquier conjunto infinito de axiomas para T.

PROPOSICIÓN 17.38. *Si T es una teoría finitamente axiomatizable y Σ es un conjunto de axiomas para T, hay un subconjunto finito de Σ que es también un conjunto de axiomas para T.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que T es finitamente axiomatizable y sea Σ un conjunto cualquiera de axiomas para T. Según el lema 17.37, hay una sentencia $\alpha \in T$ tal que todo teorema de T es consecuencia de α. Puesto que Σ es un conjunto de axiomas para T, $\Sigma \vdash \alpha$. Hay, pues, un subconjunto finito $\Gamma \subseteq \Sigma$ tal que $\Gamma \vdash \alpha$. Pero entonces toda sentencia deducible de α es deducible de Γ, por lo que Γ es un conjunto de axiomas para T. □

COROLARIO 17.39. *La teoría de las estructuras (para un lenguaje determinado cualquiera) con universo infinito no es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN. Como sabemos, una estructura $\mathcal{A}$ tiene universo infinito si y sólo si $\mathcal{A} \models \mathrm{INF}$. En otras palabras, INF es un conjunto de axiomas para la teoría T de la clase de las estructuras con universo infinito. Supongamos, en busca de una contradicción, que T es finitamente axiomatizable. Por la proposición 17.38, hay un subconjunto finito $\Gamma \subseteq \mathrm{INF}$ que también es un conjunto de axiomas para T. Sea n_0 el mayor número n tal que $\delta_n \in \Gamma$. Claramente, Γ tiene un modelo $\mathcal{A}$ cuyo universo posee exactamente n_0 elementos, por lo que la sentencia δ_{n_0+1} no es verdadera en $\mathcal{A}$. Pero entonces δ_{n_0+1} no es consecuencia de Γ, lo que implica que Γ no es un conjunto de axiomas para T, ya que δ_{n_0+1} es un teorema de T. □

Si Σ es un conjunto de axiomas para la clase de los órdenes lineales reflexivos, $\Sigma \cup \mathrm{INF}$ es un conjunto de axiomas para la clase de los órdenes lineales reflexivos infinitos. Podemos adaptar el argumento de la demostración de la proposición anterior para mostrar que la teoría de la clase de los órdenes lineales reflexivos infinitos no es finitamente axiomatizable. Tampoco lo es la teoría de la clase de las relaciones de equivalencia en un conjunto infinito.

Presentamos ahora conjuntos de axiomas para algunas teorías obtenidas a partir de estructuras o clases de estructuras. En cada caso, será claro que los axiomas ofrecidos son teoremas de las teorías en cuestión, pero no podremos demostrar que son, de hecho, conjuntos de axiomas para las respectivas teorías, ya que los instrumentos desarrollados en este libro no son suficientes para ello.

EJEMPLO 1

Las seis sentencias siguientes constituyen un conjunto de axiomas para la teoría de la estructura

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle,$$

donde $R^{\mathcal{A}}$ es el orden estricto natural en $\mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}}$ es la operación sucesor y $c^{\mathcal{A}}$ es el número cero.

$\forall y(\neg y \approx c \to \exists x y \approx fx)$ (todo número distinto de 0 es un sucesor)

$\forall xy(Rxfy \leftrightarrow (Rxy \vee x \approx y))$ (para todo n y m, $n < \mathrm{S}(n)$ sii $n \leq m$)

$\forall x \neg Rxc$ (ningún número es menor que cero)

$\forall xy(Rxy \vee Ryx \vee x \approx y)$ (para todo n y m, $n < m$ o $m < n$ o $n = m$)

$\forall xyz(Rxy \to \neg Ryx)$ ($<$ es asimétrica)

$\forall xyz((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$ ($<$ es transitiva)

EJEMPLO 2

Las sentencias siguientes constituyen un conjunto de axiomas para la teoría de la estructura

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}} \rangle,$$

donde $f^{\mathcal{B}}$ es la operación sucesor y $c^{\mathcal{B}}$ es el número cero.

$\forall x \neg fx \approx c$ (cero no es un sucesor)

$\forall xy(fx \approx fy \to x \approx y)$ (la función sucesor es inyectiva)

$\forall y(\neg y \approx c \to \exists xy \approx fx)$ (todo número distinto de 0 es un sucesor)

$\forall x \neg fx \approx x$ (ningún número es su propio sucesor)

$\forall x \neg ffx \approx x$ (ningún número es sucesor de su sucesor)

$\forall x \neg fffx \approx x$ (ningún número es sucesor del sucesor de su sucesor)

...

Éste es un conjunto infinito de sentencias. Para cada número $n > 0$ hay un axioma de la forma

$$\forall x \neg ff \cdots fx \approx x,$$

con n efes ante x. No se trata de un defecto de esta presentación, ya que la teoría no es finitamente axiomatizable. Como en el caso de INF, podemos describir con facilidad cuáles son los axiomas de esta teoría. No podemos escribirlos todos, pero sí podemos decir cómo escribirlos. Más aún, podemos determinar de modo efectivo si una sentencia es o no es uno de estos axiomas. Por lo que se refiere a los tres primeros, no hay dificultad alguna, ya que los hemos descrito explícitamente. En cuanto a los restantes, dada una fórmula, lo único que debemos hacer para determinar si es un axioma es ver si empieza por $\forall x \neg$, si luego aparece una sucesión de efes y a continuación $x \approx x$. Tenemos, pues, un procedimiento mecánico para determinar cuáles son los axiomas. La existencia de este procedimiento significa que nos hallamos ante un conjunto *efectivo* o, en lenguaje técnico, *recursivo* de axiomas. La teoría de la estructura de los números naturales con sucesor y cero es *recursivamente axiomatizable*. También lo es la teoría de las estructuras con universo infinito, ya que podemos determinar de modo mecánico si una sentencia es o no es una δ_n.

EJEMPLO 3

El álgebra de Boole, es decir, la teoría de la clase de las álgebra de conjuntos, es finitamente axiomatizable. Para mayor comodidad de lectura daremos los axiomas de modo semiformal, dejando para el lector la tarea de formalizarlos. Todas las sentencias verdaderas en todas las álgebras de conjuntos son consecuencia lógica de estos axiomas. Esta teoría puede ser considerada como la teoría general de la unión, la intersección y el complemento de conjuntos. Todos los axiomas deberían empezar con uno o más cuantificadores universales, según el número de variables, que dejamos implícitos. En un álgebra de conjuntos sobre el conjunto U, el símbolo 1 se interpreta como U y el símbolo 0 como $\emptyset$. Los axiomas se distribuyen en pares, para poner de manifiesto el paralelismo entre la unión y la intersección. Suele decirse que cada axioma de cada par es el *dual* del otro.

A.1. $x \cup y = y \cup x$, B.1. $x \cap y = y \cap x$,

A.2. $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$, B.2. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$,

A.3. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$, B.3. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$,

A.4. $x \cup \bar{x} = 1$, B.4. $x \cap \bar{x} = 0$,

A.5. $x \cup 0 = x$, B.5. $x \cap 1 = x$.

Para la formalización total elegiríamos un símbolo funcional unario f y dos símbolos funcionales binarios g y h (que interpretaríamos en cada álgebra de conjuntos como el complemento, la unión y la intersección), además de dos constantes individuales, c y d, en lugar de 0 y 1, cuya interpretación ya ha sido dada.

8. Definición de símbolos

Los teoremas de una teoría son sentencias de un lenguaje perfectamente determinado, el lenguaje de la teoría. No obstante, cuando usamos una teoría como instrumento de investigación, a menudo ampliamos el lenguaje introduciendo nuevos símbolos mediante definiciones. Nos referimos a estos nuevos símbolos como *símbolos definidos* y a los símbolos del lenguaje original como *símbolos primitivos*. Así, la teoría de conjuntos suele presentarse en un lenguaje con un único símbolo primitivo, $\in$, que se interpreta como la relación de pertenencia, pero al desarrollarla introducimos muchos símbolos definidos, símbolos que nos permiten hablar directamente del conjunto vacío, de la unión de dos conjuntos, del conjunto potencia de un conjunto, etc. Estrictamente hablando, al modificar el lenguaje cambiamos de teoría, pero, como veremos, hay un sentido preciso en que la ampliación de la teoría obtenida al ampliar el lenguaje mediante símbolos definidos es inesencial. Todo cuanto puede expresarse en el lenguaje ampliado con símbolos definidos puede ser también expresado, si bien de un modo más retorcido, en el lenguaje original. La introducción

de nuevos símbolos mediante definiciones no aumenta el contenido real de la teoría (aunque sí aumenta el conjunto de los teoremas, ya que por lo menos todas las verdades lógicas expresadas en el nuevo lenguaje son teoremas de la nueva teoría, pero no de la teoría original). Como suele decirse, *los símbolos definidos han de ser eliminables* y *las definiciones no han de ser creadoras.*

Los símbolos introducidos mediante definiciones pueden ser símbolos relacionales, símbolos funcionales y constantes individuales. Introducimos estos símbolos en el contexto de una teoría T formulada en un lenguaje L, es decir, T es un conjunto de sentencias de L cerrado con respecto a la relación de consecuencia (o, de modo equivalente, con respecto a la de deducibilidad). Una *definición de un símbolo* s será una sentencia δ (más adelante veremos cómo debe ser esta sentencia) en la que aparece el símbolo s y los símbolos restantes son símbolos de L.

Para comparar lenguajes con distintos conjuntos de símbolos introducimos el concepto de *tipo de semejanza.* Un **tipo de semejanza** o, simplemente, un **tipo** es un conjunto τ de símbolos relacionales, símbolos funcionales y constantes individuales. Si τ es un tipo de semejanza, L_τ, el **lenguaje de tipo** τ, es el lenguaje de primer orden cuyos símbolos propios son los elementos de τ. Así, si introducimos el símbolo s mediante la definición δ en el contexto de una teoría T en el lenguaje de tipo τ, todas las sentencias de T lo son de L_τ, mientras que δ lo es del lenguaje $L_{\tau\cup\{s\}}$.

Con cierta imprecisión, que el símbolo s sea eliminable significa que toda sentencia en la que aparece s es equivalente con respecto a T a otra sentencia en la que s no aparezca. Que la definición no sea creadora significa que con su ayuda no pueden obtenerse nuevos teoremas en los que el símbolo definido no aparece. Con toda precisión:

Sea T una teoría en un lenguaje L_τ, s un símbolo que no pertenece a τ y δ una sentencia de $L_{\tau\cup\{s\}}$.

(a) Decimos que s **es eliminable** con ayuda de δ si para toda sentencia α de $L_{\tau\cup\{s\}}$ hay una sentencia β de L_τ tal que

$$T\cup\{\delta\}\models\alpha\leftrightarrow\beta.$$

(b) Decimos que δ **no es creadora** si para toda sentencia α de L_τ,

$$\text{si } T\cup\{\delta\}\models\alpha, \text{ entonces } T\models\alpha.$$

Consideramos ahora qué condiciones deben satisfacer las definiciones de las distintas clases de símbolos (relacionales, funcionales, constantes individuales). Informalmente, los puntos fundamentales son éstos: 1) un símbolo relacional n-ario debe interpretarse como una relación n-aria entre objetos. Ahora bien, puesto que todo conjunto de n-tuplos es una relación, no debemos poner ninguna restricción especial a la definición de símbolos relacionales; 2) una constante individual debe ser el nombre de un objeto. Por lo tanto, antes de introducir una constante mediante una definición hemos de asegurarnos de que la teoría garantiza la existencia de un único objeto que satisface la definición y que la constante denotará; 3) un símbolo funcional n-ario debe interpretarse como una operación n-aria. Así, puesto que una operación n-aria asigna un único objeto a cada n-tuplo de objetos, antes de introducir un símbolo funcional mediante una definición debemos asegurarnos de que la teoría garantiza que es posible asignar a cada n-tuplo de objetos un único objeto según indica la definición.

Para hacer precisas estas observaciones consideramos fijado un lenguaje L_τ y una teoría T en este lenguaje. Describiremos las condiciones que deben ser satisfechas para la definición de símbolos de cada clase. Estas condiciones implicarán que el símbolo introducido en cada caso es eliminable y que la definición no es creadora.

Definición de símbolos relacionales

Si R es un símbolo relacional n-ario que no pertenece a τ, $x_1,\dots,x_n$ son variables distintas y α es una fórmula de L_τ cuyas variables libres son exactamente $x_1,\dots,x_n$, podemos introducir el símbolo R mediante la siguiente definición.

$$\delta_R: \quad \forall x_1\dots x_n(Rx_1\dots x_n\leftrightarrow\alpha).$$

Podemos glosar δ_R así: en toda estructura, α determina una relación entre n objetos. Por definición, nos referimos a esta relación mediante el símbolo R.

Definición de constantes individuales

Si c es una constante individual que no pertenece a τ y α es una fórmula de L_τ con una única variable libre, x, tal que

(1) $T\models\exists x\alpha$,

(2) $T\models\forall xy((\alpha\wedge\alpha(^x_y))\rightarrow x\approx y)$

(donde la variable y no aparece en α), podemos introducir la constante c mediante la siguiente definición.

$$\delta_c: \quad \forall x(x\approx c\leftrightarrow\alpha).$$

El sentido de la introducción de c es éste: por (1) y (2), en todo modelo de T hay exactamente un objeto que satisface α. Por definición, llamamos «c» a este único objeto.

Definición de símbolos funcionales

Si f es un símbolo funcional n-ario que no pertenece a τ, $x_1,\dots,x_n,y$ son variables distintas y α es una fórmula de L_τ con exactamente las variables libres $x_1,\dots,x_n,y$ tal que

(3) $T \models \forall x_1 \ldots x_n \exists y \alpha$,

(4) $T \models \forall x_1 \ldots x_n yz((\alpha \land \alpha(^y_z)) \to y \approx z)$

(donde la variable z no aparece en α), podemos introducir el símbolo f mediante la siguiente definición.

$$\delta_f: \qquad \forall x_1 \ldots x_n y(fx_1 \ldots x_n \approx y \leftrightarrow \alpha).$$

El contenido intuitivo de la introducción de f es éste: por (3) y (4), dados n objetos de cualquier modelo $\mathcal{A}$ de T, hay un único objeto que se relaciona con ellos según indica α. Esto significa que α determina una operación n-aria en el universo de $\mathcal{A}$, a saber, la operación que asigna a $a_1, \ldots a_n \in A$ el único objeto $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \ldots, a_n, a]$. Por definición, nos referimos con «f» a esta operación.

Veamos algunos ejemplos de introducción de símbolos por definición y de su eliminación en algunas fórmulas en que aparecen. Sea T la teoría de la estructura

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, R^{\mathcal{N}}, g^{\mathcal{N}}, h^{\mathcal{N}} \rangle,$$

donde $R^{\mathcal{N}}$ es la relación de orden estricto natural en $\mathbb{N}$ y $g^{\mathcal{N}}$ y $h^{\mathcal{N}}$ son las operaciones de suma y producto, respectivamente. Así, los teoremas de T son todas las sentencias verdaderas en esta estructura.

EJEMPLO 1

Podemos definir el símbolo relacional unario P y el símbolo relacional binario Q así:

(δ_P) $\quad \forall x(Px \leftrightarrow \exists y\, gyy \approx x)$,

(δ_Q) $\quad \forall xy(Qxy \leftrightarrow \exists z\, hzx \approx y)$.

(El símbolo definido P se interpretará como el conjunto de los números pares y Q como la relación de divisibilidad.) Usando el predicado P podemos expresar que todo número natural es menor que algún número par así:

$$\forall x \exists y(Rxy \land Py),$$

y si eliminamos P con ayuda de δ_P, obtenemos

$$\forall x \exists y(Rxy \land \exists z\, gzz \approx y).$$

Usando el símbolo relacional binario Q, expresamos que todo número es divisible por sí mismo como

$$\forall x Qxx,$$

y si eliminamos Q con ayuda de δ_Q, obtenemos

$$\forall x \exists z\, hzx \approx x.$$

EJEMPLO 2

Podemos definir la constante individual c así:

(δ_c) $\quad \forall x(x \approx c \leftrightarrow gxx \approx x)$.

(La constante c se interpretará como el número cero.) Podemos hacerlo porque hay un único número n tal que $n + n = n$, de modo que

$T \models \exists x\, gxx \approx x$,

$T \models \forall xy((gxx \approx x \land gyy \approx y) \to x \approx y)$.

Mediante la constante individual c, expresamos que cero es el menor número natural como:

$$\forall x(Rcx \lor c \approx x).$$

Para eliminar c de esta sentencia, la transformamos primero en la sentencia equivalente

$$\forall x \exists y(y \approx c \land (Ryx \lor y \approx x))$$

y a continuación aplicamos δ_c, obteniendo

$$\forall x \exists y(gyy \approx y \land (Ryx \lor y \approx x)).$$

EJEMPLO 3

Podemos definir el símbolo funcional unario f así:

(δ_f) $\quad \forall x(fx \approx y \leftrightarrow (Rxy \land \forall u \neg(Rxu \land Ruy)))$.

(El símbolo f se interpretará como la operación sucesor.) Podemos hacerlo porque todo número natural tiene un único sucesor con respecto al orden natural, de modo que

$T \models \forall x \exists y(Rxy \land \forall u \neg(Rxu \land Ruy))$,

$T \models \forall xyz((Rxy \land \forall u \neg(Rxu \land Ruy)) \land (Rxz \land \forall u \neg(Rxu \land Ruz)) \to y \approx z)$.

Con el símbolo funcional unario f podemos expresar que todo número es distinto de su sucesor mediante la sentencia

$$\forall x \neg x \approx fx.$$

Eliminamos f en dos pasos. Primero obtenemos la sentencia equivalente

$$\forall x \exists y(fx \approx y \land \neg x \approx y),$$

y a continuación aplicamos δ_f:

$$\forall x\exists y((Rxy \wedge \forall u\neg(Rxu \wedge Ruy)) \wedge \neg x \approx y).$$

Veamos un caso ligeramente más complicado. Usando f, expresamos que la operación sucesor es inyectiva así:

$$\forall xy(fx \approx fy \to x \approx y).$$

Para eliminar f obtenemos la sentencia equivalente

$$\forall xy\exists uv(fx \approx u \wedge fy \approx v \wedge (u \approx v \to x \approx y))$$

y aplicamos dos veces δ_f:

$$\forall xy\exists uv((Rxu \wedge \forall z\neg(Rxz \wedge Rzu)) \wedge (Ryv \wedge \forall z\neg(Ryz \wedge Rzv)) \wedge (u \approx v \to x \approx y)).$$

Extensiones definicionales de una teoría

Sea τ un tipo de semejanza, sea T una teoría en el lenguaje L_τ y sea Σ un conjunto de axiomas para T. Supongamos que introducimos un nuevo símbolo s mediante una definición δ de acuerdo con las estipulaciones anteriores. De este modo obtenemos una nueva teoría, T^*, en el lenguaje $L_{\tau\cup\{s\}}$. T^* es la teoría obtenida al añadir a Σ un nuevo axioma, δ. En efecto, δ, la definición de s, cumple el papel de axioma en T^*. Esto sólo significa que los teoremas de T^* son las sentencias de $L_{\tau\cup\{s\}}$ deducibles de $\Sigma\cup\{\delta\}$; en general, desde un punto de vista estrictamente lógico, las definiciones son axiomas. T y T^* son esencialmente la misma teoría, ya que 1) por lo que respecta al lenguaje original, T y T^* tienen los mismos teoremas (puesto que δ no es creadora) y 2) todo teorema de T^* es equivalente en T^* a un teorema de T (puesto que s es eliminable con ayuda de δ).

Podemos continuar este proceso añadiendo uno tras otro nuevos símbolos definidos. En el caso más general, introducimos en primer lugar un símbolo s_1 mediante una definición δ_1, obteniendo la teoría T_1 en lenguaje $L_{\tau\cup\{s_1\}}$. A continuación, partiendo de T_1, introducimos el símbolo s_2 mediante la definición δ_2, obteniendo la teoría T_2 en lenguaje $L_{\tau\cup\{s_1,s_2\}}$. Luego, partiendo de T_2 introducimos el símbolo s_3 mediante la definición δ_3, obteniendo la teoría T_3 en lenguaje $L_{\tau\cup\{s_1,s_2,s_3\}}$, etc. De este modo construimos una sucesión $T_1,\dots,T_n$ de teorías, en lenguajes cada vez más ricos, pero que esencialmente tienen el mismo contenido que la teoría T. Decimos que estas teorías son **extensiones definicionales** de la teoría original. En general,

1. T_n es una teoría en el lenguaje L_{τ_n}, donde $\tau_n = \tau\cup\{s_1,\dots s_n\}$,
2. $\Sigma\cup\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ es un conjunto de axiomas para T_n,
3. si σ es una sentencia de L_τ, $T_n \models \sigma$ sii $T \models \sigma$,
4. si σ es una sentencia de L_{τ_n}, hay σ^* de L_τ tal que $T_n \models \sigma \leftrightarrow \sigma^*$.

En el uso de una teoría, no suele distinguirse entre la teoría original y sus sucesivas extensiones definicionales. Suele hablarse de la teoría original y de sus extensiones como de la misma teoría. Estrictamente hablando, son teorías distintas, pero, como hemos visto, si bien no tienen los mismos teoremas, todo teorema de cualquier extensión definicional es reformulable como un teorema de la teoría original, por lo que la identificación es inocua.

9. Ejercicios

1. Obtenga la primera forma del teorema de corrección (teorema 17.5) a partir de la segunda (teorema 17.7).
2. ¿Puede haber dos conjuntos maximales consistentes disjuntos de sentencias de un mismo lenguaje?
3. Demuestre el apartado (4) del teorema 17.14: Si Σ es un conjunto consistente maximal de sentencias de un lenguaje de primer orden y α y β son sentencias de este lenguaje, entonces $(\alpha \to \beta) \in \Sigma$ sii $\alpha \notin \Sigma$ o $\beta \in \Sigma$.
4. Sea T un conjunto de fórmulas consistente maximal de un lenguaje L con un conjunto no vacío de constantes individuales. ¿Puede suceder que $\exists x\alpha \in T$ y para todo término cerrado t, $\neg\alpha(^x_t) \in T$?
5. Demuestre la proposición 17.16: Si $\mathcal{A}$ es una estructura, Th($\mathcal{A}$) es una teoría consistente y completa. Además, $\mathcal{A}$ es un modelo de Th($\mathcal{A}$).
6. ¿Es toda teoría consistente y completa la teoría de alguna estructura?
7. Muestre que toda teoría tiene un número infinito de conjuntos de axiomas.
8. Demuestre el lema 17.18.
9. Demuestre el lema 17.19.
10. Justifique la proposición 17.36.
11. Sea T una teoría consistente en un lenguaje L y sea α una fórmula de L con x como única variable libre tal que $T \models \exists x\alpha$. Sea c una constante que no pertenece a L. Consideremos el conjunto de sentencias

    $$\Sigma = T \cup \{\alpha(c)\}.$$

    ¿Podemos concluir que Σ es satisfacible?
12. Obtenga la primera forma del teorema de completud (teorema 17.26) a partir de la segunda (teorema 17.27).
13. Obtenga la segunda forma del teorema de completud (teorema 17.27) a partir del teorema de finitud para la consecuencia (teorema 17.29) y del hecho que toda sentencia lógicamente válida es deducible sin premisas (corolario 17.27).

14. El lenguaje apropiado para hablar de órdenes lineales estrictos tiene un único símbolo propio, el símbolo relacional binario $<$. Muestre que toda sentencia de primer orden verdadera en todos los órdenes lineales infinitos es también verdadera en algún orden lineal finito.

15. Sea $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto infinito de constantes individuales distintas y sea L el lenguaje de primer orden cuyos símbolos propios son las constantes de C y el símbolo relacional binario R. Considere la teoría T en lenguaje L con el siguiente conjunto de axiomas:

$$\Sigma = \{Rc_0c_0, Rc_1c_1, Rc_2c_2, \dots\},$$

es decir, Σ es el conjunto de todas las sentencias Rcc, con $c \in C$. ¿Es T finitamente axiomatizable? Si lo es, halle un conjunto finito de axiomas para T. Si no lo es, demuéstrelo.

16. Sea $\mathcal{K}$ la clase de los órdenes lineales estrictos finitos no vacíos y sea T la teoría de $\mathcal{K}$. Así, T es el conjunto de todas las sentencias en el lenguaje de primer orden con un símbolo relacional binario R que son verdaderas en todos los órdenes estrictos lineales finitos. Muestre que hay una estructura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ tal que $\mathcal{A} \models T$, pero $\mathcal{A} \notin \mathcal{K}$.

17. Sea P un símbolo de predicado y sea $\mathcal{K}$ la clase de las estructuras $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}} \rangle$ tales que tanto $P^{\mathcal{A}}$ como $A - P^{\mathcal{A}}$ son conjuntos infinitos. Halle un conjunto de axiomas para $T(\mathcal{K})$ y muestre que esta teoría no es finitamente axiomatizable.

18. Muestre que si Σ y Γ son dos conjuntos de sentencias de un lenguaje de primer orden sin modelos en común, hay una sentencia α tal que $\Sigma \models \alpha$ y $\Gamma \models \neg\alpha$.

19. Sean T y T' dos teorías en un mismo lenguaje L tales que

    (a) T y T' no tienen modelos en común, y
    (b) toda estructura para L es un modelo de T o de T'.

    Concluya que T y T' son finitamente axiomatizables.

20. Un buen orden es un orden lineal estricto $\mathcal{A} = \langle A, <^{\mathcal{A}} \rangle$ $(A \neq \emptyset)$ tal que todo subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo. Muestre que no hay ningún conjunto de sentencias de primer orden cuyos modelos sean exactamente los buenos órdenes.

Apéndice A

SEMÁNTICA CON ASIGNACIONES

En el capítulo 13 de este libro hemos definido los conceptos fundamentales de la lógica de primer orden por el procedimiento de ampliar el lenguaje con una constante para cada elemento del dominio de la estructura. Ahora bien, es frecuente definir estos conceptos utilizando el recurso técnico de las asignaciones. En este apéndice describimos sucintamente este método.

Denotación y satisfacción

Sea $\mathcal{A}$ una estructura apropiada para un lenguaje de primer orden L. Una **asignación** en $\mathcal{A}$ es una función del conjunto de las variables en el dominio A de la estructura. Si s es una asignación en $\mathcal{A}$, x es una variable y $a \in A$, s^x_a es la asignación definida por

$$s^x_a(y) = \begin{cases} a & \text{si } x = y \\ s(y) & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Observaciones

1. Para referirnos a la asignación $(s^x_a)^y_b$ escribiremos simplemente s^{xy}_{ab}.
2. Si $x \neq y$, entonces $s^{xy}_{ab} = s^{yx}_{ba}$.
3. Si $a \neq b$, la asignaciones s^{xx}_{ab} y s^{xx}_{ba} son distintas, puesto que atribuyen valores diferentes a la variable x:

$$\begin{aligned} s^{xx}_{ab}(x) &= (s^x_a)^x_b(x) &= b \\ s^{xx}_{ba}(x) &= (s^x_b)^x_a(x) &= a. \end{aligned}$$

4. Si $s(x) = a$, entonces $s^x_a = s$; en general, si $x_1, \dots, x_n$ son variables y $s(x_i) = a_i$ $(1 \leq i \leq n)$, entonces $s^{x_1 \dots x_n}_{a_1 \dots a_n} = s$.

Si s una asignación en la estructura $\mathcal{A}$, definimos la **denotación** en $\mathcal{A}$ de un término t de L con respecto a la asignación s, en símbolos, $t^{\mathcal{A}}[s]$, de la siguiente forma:

1. si x es una variable individual, $x^{\mathcal{A}}[s] = s(x)$,
2. si c es una constante individual, $c^{\mathcal{A}}[s] = c^{\mathcal{A}}$,
3. si f es un signo funcional n–ario, $(ft_1 \ldots t_n)^{\mathcal{A}}[s] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[s], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[s])$.

Si s es una asignación en la estructura $\mathcal{A}$, la relación de **satisfacción** de una fórmula α de L en una estructura $\mathcal{A}$ con respecto a la asignación s, en símbolos, $\mathcal{A} \models \alpha[s]$, se define de la siguiente forma:

1. $\mathcal{A} \models (t_1 \approx t_2)[s]$ sii $t_1^{\mathcal{A}}[s] = t_2^{\mathcal{A}}[s]$,
2. $\mathcal{A} \models Rt_1 \ldots t_n[s]$ sii $\langle t_1^{\mathcal{A}}[s] \ldots t_n^{\mathcal{A}}[s] \rangle \in R^{\mathcal{A}}$,
3. $\mathcal{A} \models \neg\beta[s]$ sii $\mathcal{A} \not\models \beta[s]$,
4. $\mathcal{A} \models (\beta \wedge \gamma)[s]$ sii $\mathcal{A} \models \beta[s]$ y $\mathcal{A} \models \gamma[s]$,
5. $\mathcal{A} \models (\beta \vee \gamma)[s]$ sii $\mathcal{A} \models \beta[s]$ o $\mathcal{A} \models \gamma[s]$,
6. $\mathcal{A} \models (\beta \to \gamma)[s]$ sii $\mathcal{A} \not\models \beta[s]$ o $\mathcal{A} \models \gamma[s]$,
7. $\mathcal{A} \models (\beta \leftrightarrow \gamma)[s]$ sii $\mathcal{A} \models \beta[s]$ y $\mathcal{A} \models \gamma[s]$, o $\mathcal{A} \not\models \beta[s]$ y $\mathcal{A} \not\models \gamma[s]$,
8. $\mathcal{A} \models \forall x\beta[s]$ sii para todo $a \in A$, $\mathcal{A} \models \beta[s^x_a]$,
9. $\mathcal{A} \models \exists x\beta[s]$ sii existe $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \beta[s^x_a]$.

Si $\mathcal{A} \models \alpha[s]$ diremos que la estructura $\mathcal{A}$ satisface la fórmula α con respecto a la asignación s.

LEMA A.1. (DE COINCIDENCIA) *Sean s y s' dos asignaciones en $\mathcal{A}$. Para cada término t de L y cada fórmula α de L,*

(1) *si para cada variable x que aparece en t, $s(x) = s'(x)$, entonces*

$$t^{\mathcal{A}}[s] = t^{\mathcal{A}}[s'],$$

(2) *si para cada variable x que aparece libre α, $s(x) = s'(x)$, entonces*

$$\mathcal{A} \models \alpha[s] \text{ si y sólo si } \mathcal{A} \models \alpha[s'].$$

COROLARIO A.2.

(1) *Si t es un término cerrado, para cualesquiera asignaciones s y s' en $\mathcal{A}$,*

$$t^{\mathcal{A}}[s] = t^{\mathcal{A}}[s'].$$

(2) *Si α es una sentencia, para cualesquiera asignaciones s y s' en $\mathcal{A}$,*

$$\mathcal{A} \models \alpha[s] \text{ sii } \mathcal{A} \models \alpha[s'].$$

CONVENCIONES NOTACIONALES

1. Si t es un término cerrado, podemos omitir la asignación y escribir «$t^{\mathcal{A}}$» en lugar de «$t^{\mathcal{A}}[s]$», ya que, por el apartado (1) del corolario anterior, la denotación de t en $\mathcal{A}$ es la misma con respecto a cualquier asignación.
2. Si α es una sentencia, en lugar de «$\mathcal{A} \models \alpha[s]$», podemos escribir «$\mathcal{A} \models \alpha$», pues, en virtud del apartado (2) del corolario anterior, la satisfacción de una sentencia en una estructura no depende de la asignación. Si α es una sentencia y $\mathcal{A} \models \alpha$, se dice también que $\mathcal{A}$ **es un modelo de** α o que α **es verdadera en** $\mathcal{A}$.
3. De acuerdo con el lema de coincidencia, si t es un término cuyas variables se encuentran entre $x_1, \ldots, x_n$ y s, s' son dos asignaciones en una estructura $\mathcal{A}$,

$$t^{\mathcal{A}}[s^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}] = t^{\mathcal{A}}[s'^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}].$$

Por eso podemos omitir toda mención de las asignaciones y escribir simplemente

$$t^{\mathcal{A}}\left[\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ a_1 \ldots a_n \end{smallmatrix}\right]$$

en lugar de

$$t^{\mathcal{A}}[s^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}].$$

Si el contexto indica claramente cuáles son las variables escribiremos

$$t^{\mathcal{A}}[a_0, \ldots, a_n].$$

Análogamente, y también de acuerdo con el lema de coincidencia, si α es una fórmula cuyas variables libres se encuentran entre $x_1, \ldots, x_n$ y s, s' son dos asignaciones en una estructura $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \alpha[s^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}] \text{ sii } \mathcal{A} \models \alpha[s'^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}],$$

por lo que, como en el caso de los términos, escribiremos simplemente

$$\mathcal{A} \models \alpha\left[\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ a_1 \ldots a_n \end{smallmatrix}\right]$$

en lugar de

$$\mathcal{A} \models \alpha[s^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}].$$

Si el contexto indica claramente cuáles son las variables escribiremos

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_0, \ldots, a_n].$$

LEMA A.3. (DE SUSTITUCIÓN) *Si t es un término cerrado de L, $\mathcal{A}$ es una estructura y $a = t^{\mathcal{A}}$,*

(1) *para todo término r de L,*

$$r\binom{x}{t}^{\mathcal{A}}[s] = r^{\mathcal{A}}[s^x_a],$$

(2) *para toda fórmula α de L,*

$$\mathcal{A} \models \alpha\binom{x}{t}[s] \text{ sii } \mathcal{A} \models \alpha[s^x_a].$$

SATISFACIBILIDAD Y CONSECUENCIA

Un conjunto Γ de fórmulas de un lenguaje de primer orden L es **satisfacible** si y sólo si existe una estructura $\mathcal{A}$ y una asignación s en $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \alpha[s]$, para toda $\alpha \in \Gamma$. Si Γ no es satisfacible, es **insatisfacible**. Si $\mathcal{A} \models \alpha[s]$, para toda $\alpha \in \Gamma$, decimos que $\mathcal{A}$ **satisface** Γ con respecto a la asignación s y escribimos «$\mathcal{A} \models \Gamma[s]$». Si Γ es un conjunto de sentencias, podemos escribir «$\mathcal{A} \models \Gamma$» en lugar de «$\mathcal{A} \models \Gamma[s]$».

Una fórmula α de L es **lógicamente válida** si y sólo si para toda estructura $\mathcal{A}$ para L y toda asignación s en $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \alpha[s]$.

Una fórmula α es **consecuencia** de un conjunto de fórmulas Γ, en símbolos, $\Gamma \models \alpha$, si y sólo si para toda estructura $\mathcal{A}$ y toda asignación s en $\mathcal{A}$: si $\mathcal{A} \models \Gamma[s]$, entonces $\mathcal{A} \models \alpha[s]$. En particular, si Γ es un conjunto de sentencias y α es una sentencia, $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si todo modelo de Γ es también un modelo de α.

APÉNDICE B
ALFABETO GRIEGO

Mayús.	Minús.	Nombre
Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	épsilon
Ζ	ζ	dseta
Η	η	eta
Θ	ϑ, θ	zeta
Ι	ι	iota
Κ	κ, ϰ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	ómicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	ro
Σ	σ, ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	ípsilon
Φ	ϕ, φ	fi
Χ	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega



ÍNDICE DE MATERIAS

Impreso en el mes de septiembre de 1998
en Talleres LIBERDÚPLEX, S. L.
Constitución, 19
08014 Barcelona